

1. Expresa en radianes los ángulos:

1. 30°

2. 45°

3. 210°

4. 405°

2. Expresa en grados sexagesimales los ángulos:

1. $\frac{2\pi}{3}$

2. $\frac{3\pi}{4}$

3. $\frac{5\pi}{3}$

4. 3 r

3. Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula el valor exacto de las otras razones del ángulo α .

4. Sabiendo que $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcula el valor exacto de las otras razones del ángulo α .

5. Escribe la expresión $2\tan^2 \alpha - 2\sec^2 \alpha + 5\sin^2 \alpha$ de forma que solo contenga la razón coseno.

6. Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{\sec \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$

2. $\frac{\sin^2 \alpha}{1-\cos \alpha}$

3. $\frac{\sec \alpha}{\csc \alpha \cdot \tan \alpha}$

7. Simplifica la expresión: $\sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$

8. Halla, sin usar la calculadora, el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin 135^\circ$

2. $\cos 210^\circ$

3. $\tan 300^\circ$

4. $\sin 870^\circ$

9. Calcula el valor numérico de la expresión $\sin \frac{5x}{2} - \cos(\pi + 2x) - 2\cos 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$, para $x = \frac{\pi}{3}$.

10. Suponiendo ángulos del primer cuadrante, halla, sin calculadora, el valor exacto de las siguientes expresiones:

1. $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$

2. $\cos\left(30 + \arcsin \frac{1}{2}\right)$

3. $\sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$

4. $\arccos(\sin 12^\circ)$

11. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:

1. $\tan \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha + \cos \alpha$

2. $\frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$

3. $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

4. $\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \csc^2 \alpha$

5. $\frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\csc \alpha - \sin \alpha} = \tan^3 \alpha$

6. $\frac{\csc \alpha}{1+\cot^2 \alpha} = \sin \alpha$

7. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \sin \alpha$

8. $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

9. $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 2 \cdot \csc^2 \alpha$

10. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$

2. $\cos x = -\cos 22^\circ$

3. $\tan x = \sqrt{3}$

4. $\sin x = \cos 32^\circ$

5. $\tan x = \sin x$

6. $\cos x + \sin x = \sec x$

7. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

8. $2\cos^2 x - 3\sin x = 3$

9. $\sin x + \cos x = 1$

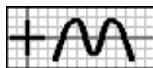
10. $\cos x - \sin x = 0$

13. Resuelve los siguientes sistemas (ángulos del primer giro):

1. $\begin{cases} x + y = 90 \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1}{2} \\ \csc x + \sec y = -1 \end{cases}$



14. Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin 2\alpha$

2. $\cos \frac{\alpha}{2}$

3. $\operatorname{ctg} 2\alpha$

15. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcula el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin \frac{\alpha}{2}$

2. $\cos 2\alpha$

3. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

16. Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, calcula el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin(\alpha+\beta)$

2. $\cos(\alpha-\beta)$

3. $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$

17. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{3}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, calcula el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin(2\alpha+\beta)$

2. $\cos(\alpha-2\beta)$

3. $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$

18. Escribir las razones de $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función solo de la razón $\cos \alpha$.

19. Transformar las siguientes sumas en producto (sin calcular las razones):

1. $\sin 60 + \sin 40$

2. $\operatorname{tg} 60 + \operatorname{tg} 46$

3. $1 + \cos \alpha$

20. Transformar las siguientes operaciones en producto:

1. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

2. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha+\beta)$

21. Halla, sin usar calculadora, el valor exacto de las siguientes razones:

1. $\sin 15$

2. $\cos 75$

3. $\operatorname{tg} 105$

4. $\cos 517^\circ 30'$

22. Simplifica las siguientes expresiones:

1. $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}$

2. $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

3. $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$

23. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades (sin usar calculadora):

1. $2 \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$

2. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

3. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$

4. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2 \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha$

5. $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$

6. $2 \cdot \cos^2 \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1$

7. $\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

8. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$

9. $\cos 57 + \sin 27 = \cos 3$

10. $\sin 125 - \cos 25 = -\sin 5$

11. $\frac{\sin 5\alpha + \sin \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = 1 + 2 \cdot \cos 2\alpha$

12. $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{sec} 2\alpha$

13. $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

14. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}$

15. $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + 1} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

16. $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

17. $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \sqrt{3} \quad (\alpha + \beta = 60^\circ)$

18. $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sqrt{2} - 1 \quad (\alpha + \beta = 45^\circ)$

24. Comprueba las siguientes igualdades:

1. $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \quad (A + B + C = 180^\circ)$

2. $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A = 1 \quad (A + B + C = 90^\circ)$

25. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sen 2x + \sen x = 0$

2. $\sen 2x = \tg x$

3. $\tg 2x + \tg x = 0$

4. $1 - \sen \frac{x}{2} = \cos x$

5. $3 \cdot \cos x \cdot \sen 2x = 2 \cdot \sen^3 x$

6. $\sen 3x - \sen x = \cos 2x$

7. $\sen 3x - \cos 3x = \sen x - \cos x$

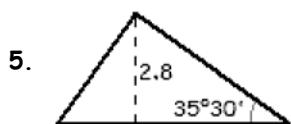
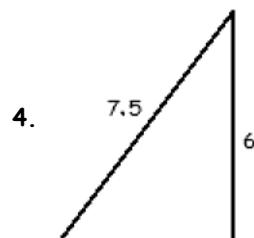
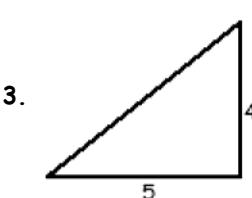
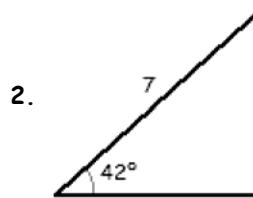
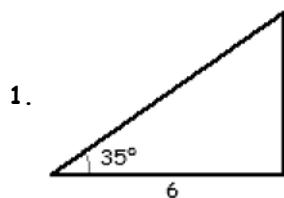
26. Resuelve los siguientes sistemas (ángulos del primer giro):

$$\begin{cases} \sen x \cdot \sen y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

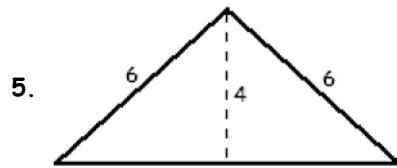
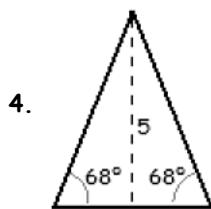
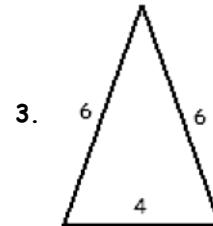
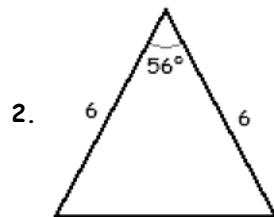
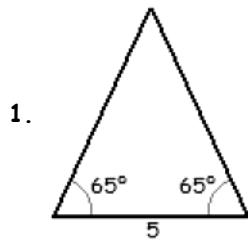
$$\begin{cases} \sen^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x - \sen^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \tg x + \tg y = 2 \end{cases}$$

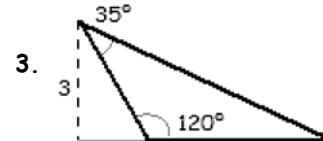
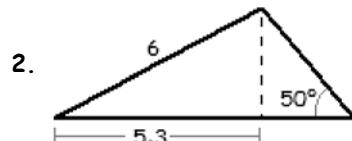
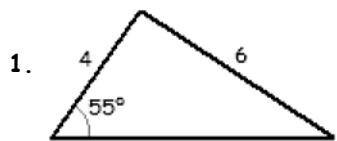
27. Resuelve y halla el área de los siguientes triángulos rectángulos:



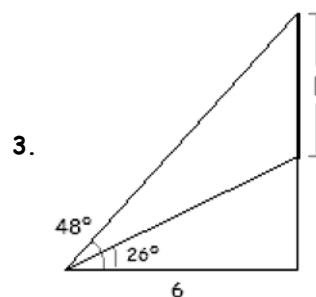
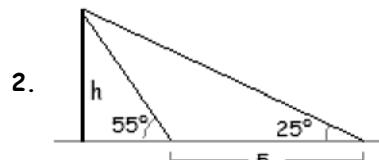
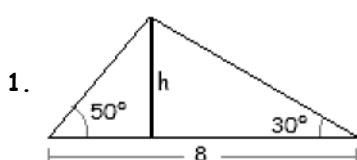
28. Resuelve y halla el área de los siguientes triángulos isósceles:



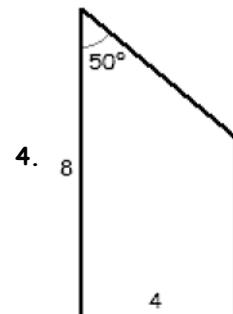
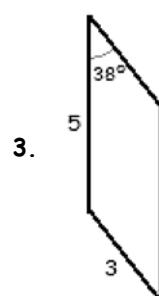
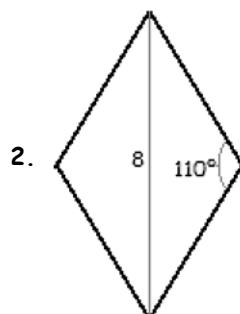
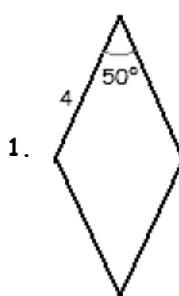
29. Resuelve y halla el área de los siguientes triángulos:



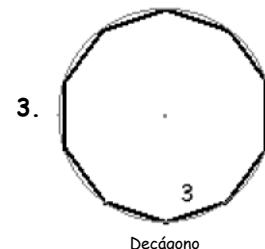
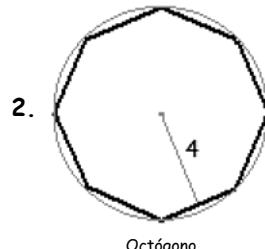
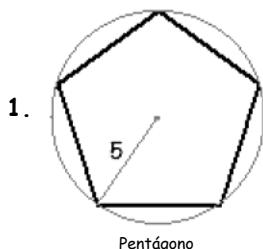
30. Halla el valor de h en las siguientes figuras y calcula el área de los tres triángulos que forman:



31. Calcula el área de las siguientes figuras:



32. Halla el área de los siguientes polígonos regulares:



33. Resuelve y halla el área de los siguientes triángulos:

1. $a = 4, b = 5, c = 6$

2. $a = 7, b = 10, c = 4$

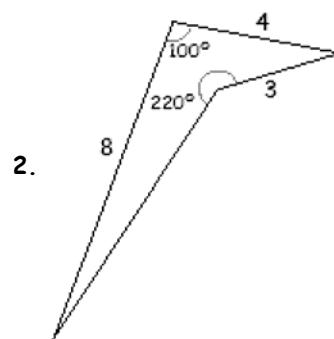
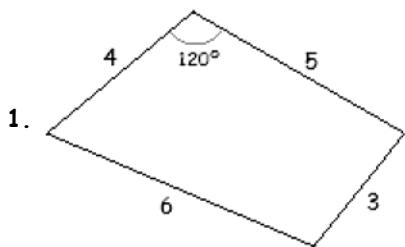
3. $a = 5, b = 7, C = 62^\circ$

4. $b = 6, A = 106^\circ, C = 38^\circ 30'$

5. $c = 5, b = 6, B = 40^\circ$

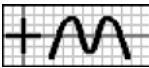
6. $A = 50^\circ, a = 5, c = 6$

34. Halla el área de los siguientes cuadriláteros:



35. Calcula la altura de una torre situada en terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1.20 m de altura, colocado a 10 m de ella, se ha medido el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida al punto más elevado, obteniéndose $58^\circ 32'$.

36. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 55° y si se apoya sobre la otra fachada el ángulo que forma es de 70° . Halla la anchura de la calle y la altura que alcanza la escalera sobre cada una de las fachadas.



37. Se desea saber la altura de un edificio situado en la orilla opuesta de un río. La visual al extremo superior del edificio, desde un cierto punto del suelo, forma un ángulo de elevación de 27° . Aproximándose 20 m a la orilla, el ángulo es de 56° . Calcula la altura.
38. Dos individuos observan un globo situado entre ellos y en el mismo plano vertical. La distancia entre los individuos es de 500 m. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son de 36° y 41° respectivamente. Halla la altura del globo y su distancia a cada observador.
39. Determina la distancia que existe desde los puntos A y B, que distan entre sí 300 m, a otro inaccesible C, sabiendo que desde A se ven los puntos B y C con un ángulo de 42° y desde B, el ángulo con el que se ven los otros dos puntos es de $56^\circ 35'$.
40. Una antena está sujetada al suelo mediante 4 cables, fijados en los vértices de un cuadrado de 20 m, estando la antena situada en el centro de dicho cuadrado. Sabiendo que el ángulo que forman los cables con el suelo es de 65° , determina la altura de la antena y la longitud total de los cables.
41. Las distancias desde un punto A a otros dos B y C son, respectivamente, 210 m y 150 m. Desde A se ve a ambos con un ángulo de 38° . Calcula la distancia que hay entre los puntos B y C.
42. Para acceder a la entrada de un edificio hay que subir una rampa de 30 m, que tiene una inclinación de 10° . La visual al punto más alto del edificio, desde el inicio de la rampa, es de 38° . Calcula la altura del edificio.
43. Colocados a 500 m de un edificio, se ve su punto más alto con un ángulo de elevación de 3° . En ese punto más alto del edificio hay una antena, que se ve con un ángulo de elevación de 35° . Halla la altura del edificio y de la antena.
44. Ana y Beatriz desean saber la distancia que hay entre dos puntos inaccesibles C y D. Para ello se colocan a 30 m de distancia entre sí. Ana ve los puntos C y D con respecto a Beatriz con ángulos de $40^\circ 35'$ y 70° , respectivamente, mientras que Beatrizlos ve con respecto a Ana con ángulos de $100^\circ 22'$ y 60° , respectivamente. Determina la distancia que existe entre C y D.

— Soluciones —

1. 1.1. $\frac{\pi}{6}$ 1.2. $\frac{\pi}{4}$ 1.3. $\frac{7\pi}{6}$ 1.4. $\frac{9\pi}{4}$ 2. 2.1. 120 2.2. 135 2.3. $102^\circ 51' 26''$ 2.4. $171^\circ 53' 14''$ 3. $\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{seca} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{cosca} = 3$; $\operatorname{ctga} = -2\sqrt{2}$ 4. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$; $\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{seca} = \frac{-\sqrt{13}}{2}$; $\operatorname{cosca} = \frac{-\sqrt{13}}{3}$; $\operatorname{ctga} = \frac{2}{3}$ 5. $3-5\cos^2 \alpha$ 6. 6.1. $\cos \alpha$ 6.2. $1+\cos \alpha$ 6.3. 1 7. $2\cos \alpha$ 8. 8.1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8.2. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ 8.3. $-\sqrt{3}$ 8.4. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{5}{2}$ 10. 10.1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 10.2. $\frac{1}{2}$ 10.3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 10.4. 78 11. 11.1. si 11.2. si 11.3. si 11.4. si 11.5. si 11.6. si 11.7. si 11.8. si 11.9. si 11.10. si 12. 12.1. $15+180k$; $75+180k$ 12.2. $158+360k$; $202+360k$ 12.3. $60+180k$ 12.4. $58+360k$; $122+360k$ 12.5. 180k 12.6. 180k; $135+180k$ 12.7. $45+90k$ 12.8. $210+180k$; $270+360k$ 12.9. $360k$; $90+360k$ 12.10. $45+180k$ 13. 13.1. (45,45) 13.2. (60,30), (150,120), (120,330), (210,60) 13.3. (90,120), (90,240), (210,0), (330,0) 14.1. $\frac{-4\sqrt{5}}{9}$ 14.2. $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{5}}{6}$ 14.3. $\frac{-\sqrt{5}}{20}$ 15.1. $\frac{\sqrt{338+52\sqrt{13}}}{26}$ 15.2. $\frac{-5}{13}$ 15.3. $\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ 16. 16.1. $\frac{2\sqrt{13}+6\sqrt{26}}{39}$ 16.2. $-\frac{3\sqrt{13}+4\sqrt{26}}{39}$ 16.3. $\frac{27+9\sqrt{26}-3\sqrt{2}-3\sqrt{13}}{34}$ 17.1. $\frac{21+4\sqrt{15}}{40}$ 17.2. $\frac{24\sqrt{15}-7}{100}$ 17.3. $\frac{143\sqrt{15}-600}{371}$ 18. $2\cos^2 \alpha - 1$; $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$; $8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$ 19. 19.1. $2\cdot\operatorname{sen} 50\cdot\cos 10$ 19.2. $\frac{\operatorname{sen} 106}{\cos 60 \cdot \cos 46}$ 19.3. $2\cdot\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ 20. 40, 30 20.1. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ 20.2. $8\cdot\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2}$ 21.1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 21.2. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 21.3. $-2\sqrt{3}$ 21.4. $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ 22.1. $2\cdot\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ 22.2. $\operatorname{tg}(45-\alpha)$ 22.3. $-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$ 23.1. si 23.2. si 23.3. si 23.4. si 23.5. si 23.6. si 23.7. si 23.8. si 23.9. si 23.10. si 23.11. si 23.12. si 23.13. si 23.14. si 23.15. si 23.16. si 23.17. si 23.18. si 24.1. si 24.2. si 25.1. 180k; $120+360k$; $240+350k$ 25.2. 180k; $45+90k$ 25.3. 60k 25.4. 360k; $60+360k$; $300+360k$ 25.5. 60k 25.6. $45+90k$; $30+360k$; $150+360k$ 25.7. 180k; $67.5+90k$ 26.1. (30,30), (150,150) 26.2. (30,45), (30,135), (150,45), (150,135) 26.3. (45,45), (225,225) 27. 27.1. 55° , 7.32, 4.2; 12.6 27.2. 48° , 5.2, 4.68; 12.17 27.3. 6.4, $50^\circ 20' 25''$, $38^\circ 39' 35''$; 10 27.4. 4.5, $36^\circ 52' 12''$, $53^\circ 7' 48''$; 13.5 27.5. $54^\circ 30'$, 4.82, 3.44, 5.92; 8.29 28. 28.1. 50° , 5.92, 5.92; 13.4 28.2. 62° , 5.64; 14.95 28.3. $70^\circ 31' 44''$, $70^\circ 31' 44''$, $38^\circ 56' 32''$; 11.32 28.4. 44°, 5.39, 5039, 4.04; 10.1 28.5. 4.74, $42^\circ 35' 9''$, $42^\circ 35' 9''$, 8.94 29. 29.1. $33^\circ 8' 19''$, $91^\circ 51' 41''$, 7.31; 11.99 29.2. $27^\circ 57' 10''$, $102^\circ 2' 50''$, 3.67, 7.66; 10.76 29.3. 25°, 7.1, 3.46, 4.7; 7.05 30. 30.1. 3.12; 4.09, 8.39, 12.48 30.2. 3.5; 4.29, 8.75, 13.04 30.3. 3.73; 8.79, 11.19, 19.98 31. 31.1. 12.27 31.2. 22.4 31.3. 9.25 31.4. 25.28 32. 32.1. 59.5 32.2. 53.12 32.3. 69.3 33.1. $A=41^\circ 24' 34''$, $B=55^\circ 46' 16''$, $C=82^\circ 49' 10''$, $S=9.91$ 33.2. $A=33^\circ 7' 23''$, $B=128^\circ 40' 55''$, $C=18^\circ 11' 42''$, $S=10.93$ 33.3. $A=43^\circ 31' 46''$, $B=74^\circ 28' 14''$, $c=6.41$, $S=15.435$ 33.4. $B=35^\circ 30'$, $a=9.93$, $c=6.43$, $S=18.94$ 33.5. $A=107^\circ 36' 42''$, $C=32^\circ 23' 18''$, $a=8.9$, $S=14.3$ 33.6. $B_1=63^\circ 10' 58''$, $C_1=66^\circ 49' 2''$, $b_1=5.83$, $S_1=13.4$; $B_2=16^\circ 49' 2''$, $C_2=113^\circ 10' 58''$, $b_2=1.89$, $S_2=4.34$ 34.1. $h=3.11$; $S_1=4.06$, $S_2=8.38$, $S_3=12.44$ 34.2. $h=3.47$; $S_1=4.21$, $S_2=8.66$, $S_3=12.87$ 35. 17.54 36. 9.4, 8.2; 9.16 37. 15.57 38. 198.47; 337.66, 302.52 39. 253.56, 202.59 40. 30.32, 133.8 41. 130.21 42. 17.87 43. 30.04, 4.97 44. 22.97