■ 4-3 APLICACIONES DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección, estudiaremos algunas aplicaciones de las ecuaciones lineales y líneas rectas a problemas en la administración y la economía.

Modelos de costo lineal

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como *costos fijos* y *costos variables*. A los **costos fijos** hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; es decir, no dependen del nivel de producción. Ejemplos de costos fijos son las rentas, intereses sobre préstamos y salarios de administración.

Los **costos variables** dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos. Los costos de los materiales y de la mano de obra son ejemplos de costos variables. El costo total está dado por

Costo total = Costos variables + Costos fijos

Consideremos el caso en que *el costo variable por unidad del artículo es constante*. En este caso, los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si m denota el costo variable por unidad, entonces los costos variables totales al producir x unidades de artículos son de mx dólares. Si los costos fijos son de b dólares, se desprende que el costo total y_c (en dólares) de producir x unidades está dado por

$$\text{Costo total} = \text{Costos totales variables} + \text{Costos fijos}$$

$$y_c = mx + b \tag{1}$$

La ecuación (1) es un ejemplo de un **modelo de costo lineal**. La gráfica de la ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuya ordenada al origen da los costos fijos.

EJEMPLO 1 ***(Modelo de costo lineal)*** El costo variable de procesar un kilo de granos de café es de 50¢ y los costos fijos por día son de $300.

a) Dé la ecuación de costo lineal y dibuje su gráfica.

b) Determine el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución

a) Si y_c representa el costo (en dólares) de procesar x kilos de granos de café por día, se sigue que de acuerdo con el modelo lineal,

$$y_c = mc + b$$

en donde m representa el costo variable por unidad y b es el costo fijo. En nuestro caso, $m = 50¢ = \$0.50$ y $b = \$300$. Por tanto,

$$y_c = 0.5x + 300$$

Con la finalidad de dibujar la gráfica de la ecuación (2), primero encontramos dos puntos en ella.

Haciendo $x = 0$ en la ecuación (2), tenemos que $y = 300$; haciendo $x = 200$ en la ecuación (2), tenemos que $y_c = 0.5(200) + 300 = 400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación de costo (2) son (0, 300) y (200, 400). Graficando estos dos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 18. Nótese que la porción relevante de la gráfica está situada por completo en el primer cuadrante porque x y y_c no pueden ser cantidades negativas.

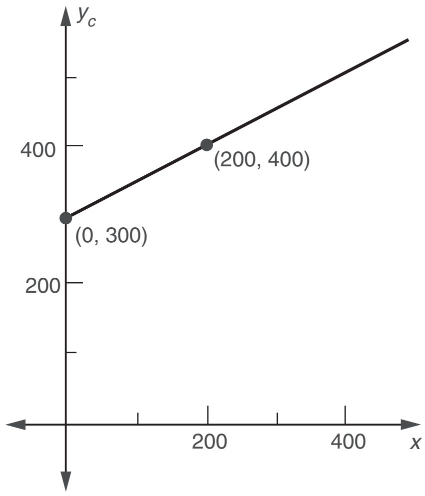


FIGURA 18

☛ **12.** Determine una expresión para y_c en un modelo de costo lineal, si el costo fijo es \$4000 por periodo y cuesta \$7000 producir 200 unidades de producto.

b) Sustituyendo $x = 1000$ en la ecuación (2), obtenemos

$$y_c = 0.5(1000) + 300 = 800$$

En consecuencia, el costo de procesar 1000 kilos de granos de café al día será de \$800. ☛ **12**

EJEMPLO 2 ***(Modelo de costos)*** El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de \$350, mientras que cuesta \$600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir x máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución Se nos han dado los puntos (10, 350) y (20, 600) que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la línea que une estos dos puntos es

$$m = \frac{600 - 350}{20 - 10} = \frac{250}{10} = 25$$

Usando la fórmula punto-pendiente, advertimos que la ecuación requerida de la línea recta (del modelo de costo lineal) con pendiente $m = 25$ y que pasa por el punto (10, 350) es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y_c - 350 = 25(x - 10) = 25x - 250$$

es decir,

$$y_c = 25x + 100 \qquad (3)$$

Respuesta $y_c = 15x + 4000$

La gráfica de la ecuación (3) en este caso no es una línea recta continua porque x no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable x sólo puede tomar valores enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . Los valores correspondientes de y_c se dan en la tabla 5.

TABLA 5

x	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y_c	100	125	150	175	200	225	250	$\cdots$

☛ **13.** Si cuesta \$4500 producir 75 unidades semanales y \$5200 producir 100 a la semana, ¿cuáles son los costos fijos semanales y cuál el costo variable por unidad?

Graficando estos puntos, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 19. Nótese que la gráfica consta de puntos (discretos) separados más que de una línea recta continua. ☛ **13**

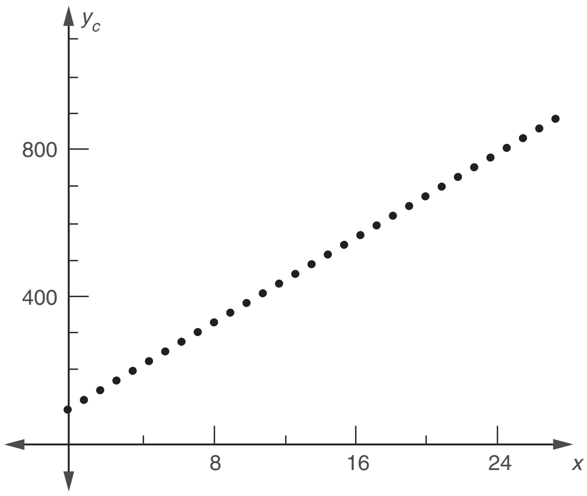


FIGURA 19

Depreciación lineal

Cuando una compañía compra parte de un equipo o maquinaria, reporta el valor de ese equipo como uno de los activos en su hoja de balance. En años subsecuentes, este valor debe disminuir debido al lento desgaste del equipo, o bien, a que se vuelve obsoleto. Esta reducción gradual del valor de un activo se denomina *depreciación*. Un método común de calcular el monto de la depreciación es reducir el valor cada año en una cantidad constante, de forma tal que el valor se reduzca a un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del equipo. Esto se denomina *depreciación lineal*. Tenemos

$$\text{Tasa de depreciación (anual)}$$
$$= (\text{Valor inicial} - \text{Valor de desecho}) \div (\text{Tiempo de vida en años})$$

Respuesta \$2400 y \$28 por unidad.

EJEMPLO 3 ***(Depreciación)*** Una empresa compra maquinaria por \$150,000. Se espera que el tiempo de vida útil de la maquinaria sea de 12 años con un valor de desecho de cero. Determine el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Solución

Depreciación por año = (Precio de adquisición inicial) ÷ (Vida útil en años)
= (150,000 dólares) ÷ (12 años)
= 12,500 dólares

Valor después de x años = (Valor inicial) − (Depreciación por año)(Número de años)
= (150,000 dólares) − (12,500 dólares por año)(x años)
= $150{,}000 - 12{,}500x$ dólares

La gráfica de esta relación aparece en la figura 20. ☛ **14**

☛ **14.** Una compañía está utilizando una depreciación lineal para calcular el valor de su planta recientemente construida. Después de 2 años está valuada en \$8.8 millones y después de 6 años en \$7.2 millones. ¿Cuál fue el costo inicial y después de cuántos años el valor se depreciará a cero?

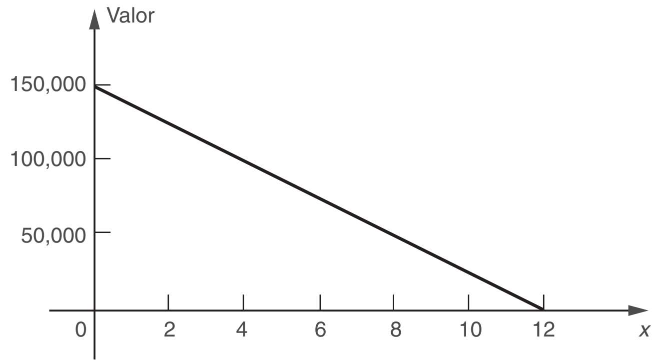


FIGURA 20

Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina **ley de la demanda**. La ley más simple es una relación del tipo

$$p = mx + b \qquad (4)$$

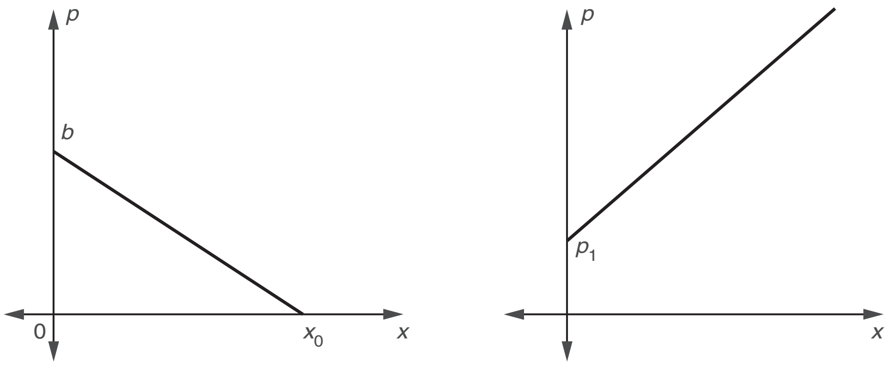
en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama **curva de demanda**. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Esto nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Es un hecho perfectamente conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores po-

Respuesta \$9.6 millones, 24 años.

drán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda de la ecuación (1) es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la parte a) de la figura 21. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación (4) sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina **ley de la oferta**. La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como **curva de la oferta**.



Curva de demanda lineal
a)

Curva de oferta lineal
b)

FIGURA 21

En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de oferta lineal típica aparece en la parte b) de la figura 21. El precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

EJEMPLO 4 ***(Demanda)*** Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de \$25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de \$20 a cada rasuradora eléctrica. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y) los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas.

$$x = 20, p = 25 \quad \text{y} \quad x = 30, p = 20$$

De modo que los puntos son (20, 25) y (30, 20). Dado que la ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos

(20, 25) y (30, 20). La pendiente de la línea que une estos puntos es

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = -\frac{5}{10} = -0.5$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la línea que pasa por (20, 25) con pendiente $m = -0.5$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dado que $y = p$, tenemos que

$$p - 25 = -0.5x(x - 20)$$
$$p = -0.5x + 35$$

que es la ecuación de demanda requerida. (Véase la figura 22). ☛ **15**

☛ **15.** Cuando el precio por unidad es \$10, la oferta será de 80 unidades diarias, mientras que será de 90 unidades a un precio unitario de \$10.50. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal. Dibuje la curva de oferta

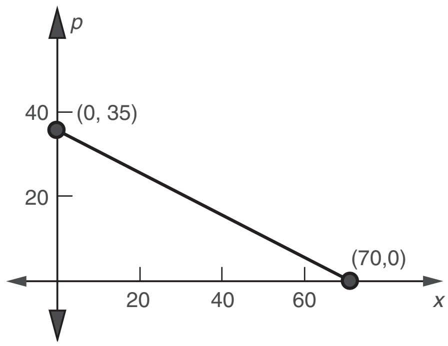
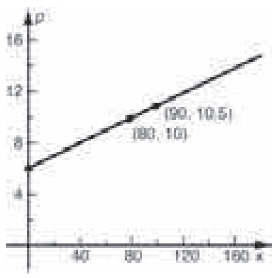


FIGURA 22

Tasa de sustitución

Con frecuencia, los planeadores tienen que decidir entre diferentes maneras de asignar recursos limitados. Por ejemplo, un fabricante tiene que asignar la capacidad de la planta entre dos productos diferentes. Si la relación entre las cantidades de los dos productos es lineal, la pendiente de su gráfica puede interpretarse como la tasa de sustitución de un producto por otro. Considere el ejemplo siguiente.

Respuesta $p = \frac{1}{20}x + 6$



EJEMPLO 5 (***Decisión de tránsito***) El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de \$200 millones de capital para gasto sobre transporte, e intenta utilizarlo para construir metros subterráneos o carreteras. Cuesta \$2.5 millones por milla construir carreteras y \$4 millones por milla para metros subterráneos. Encuentre la relación entre el número de millas de carretera y de subterráneo que puede construirse para utilizar por completo el presupuesto disponible. Interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Solución Suponga que se construyen x millas de carretera y y millas de subterráneo. El costo de construir x millas de carretera a \$2.5 millones por milla es $2.5x$ millones de dólares y el costo de construir y millas de subterráneo a \$4 millones por milla es 4y millones de dólares. Como el costo total tiene que ser igual al presupuesto asignado para el propósito,

$$2.5x + 4y = 200$$

Esta ecuación proporciona la relación requerida entre los números de millas que pueden construirse dentro del presupuesto.

Al resolver la ecuación dada para y, tenemos

$$y = -\tfrac{5}{8}x + 50$$

La pendiente de esta recta es $-\frac{5}{8}$, la cual expresa el hecho de que la construcción de cada milla adicional de carretera será a un costo de $\frac{5}{8}$ de milla de construcción de subterráneo. Al resolver la ecuación original para x en términos de y, obtenemos

$$x = -\tfrac{8}{5}y + 80$$

Así, cada milla adicional de construcción de subterráneo sustituye $\frac{8}{5}$ millas de construcción de carretera.

EJERCICIOS 4-3

1. *(Modelo de costo lineal)* El costo variable de fabricar una mesa es de \$7 y los costos fijos son de \$150 al día. Determine el costo total y_c de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

2. *(Modelo de costo lineal)* El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de \$700 y el de 120 cámaras a la semana es de \$800.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

3. *(Modelo de costo lineal)* A una compañía le cuesta \$75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y \$120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

a) Determine la ecuación de costos, suponiendo que sea lineal.

b) ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

c) ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

4. *(Modelo de costo lineal)* La compañía de mudanzas Ramírez cobra \$70 por transportar cierta máquina 15 millas y \$100 por transportar la misma máquina 25 millas.

a) Determine la relación entre la tarifa total y la distancia recorrida, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cuál es la tarifa mínima por transportar esta máquina?

c) ¿Cuál es la cuota por cada milla que la máquina es transportada?

5. *(Modelo de costo lineal)* Los costos fijos por fabricar cierto artículo son de \$300 a la semana y los costos totales por fabricar 20 unidades a la semana son de \$410. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, suponiendo que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 30 unidades a la semana?

6. *(Modelo de costo lineal)* Un hotel alquila un cuarto a una persona a una tarifa de \$25 por la primera noche y de \$20 por cada noche siguiente. Exprese el costo y_c de la cuenta en términos de x, el número de noches que la persona se hospeda en el hotel.

7. *(Modelo de costo lineal)* Una compañía especializada ofrece banquetes a grupos de personas al costo de \$10 por persona, más un cargo extra de \$150. Encuentre el costo y_c que fijaría la compañía por x personas.

8. *(Modelo de costo lineal)* El costo de un boleto de autobús en Yucatán depende directamente de la distancia viajada. Un recorrido de 2 millas cuesta 40¢, mientras que uno de 6 millas tiene un costo de 60¢. Determine el costo de un boleto por un recorrido de x millas.

9. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de detergente encuentra que las ventas son de 10,000 paquetes a la semana cuando el precio es de \$1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a 12,000 cuando el precio se reduce a \$1.10 por paquete. Determine la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

10. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de televisores advierte que a un precio de \$500 por televisor, las ventas ascienden a 2000 televisores al mes. Sin embargo, a $450 por televisor, las ventas son de 2400 unidades. Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

11. *(Ecuación de la oferta)* A un precio de $2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8000 camisetas al mes; a $4 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 camisetas al mes. Determine la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

12. *(Relación de la demanda)* Un fabricante de herramientas puede vender 3000 martillos al mes a $2 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 martillos a $2.75 cada uno. Determine la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

13. *(Ecuación de oferta)* A un precio de $10 por unidad, una compañía proveería 1200 unidades de su producto, y a $15 por unidad, 4200 unidades. Determine la relación de la oferta, suponiendo que sea lineal.

14. *(Renta de apartamentos)* Bienes Raíces Georgia posee un complejo habitacional que tiene 50 apartamentos. A una renta mensual de $400, todas los apartamentos son rentados, mientras que si la renta se incrementa a $460 mensuales, sólo pueden rentarse 47.

a) Suponiendo una relación lineal entre la renta mensual p y el número de apartamentos x que pueden rentarse, encuentre esta relación.

b) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta mensual aumenta a $500?

c) ¿Cuántos apartamentos se rentarán, si la renta disminuye a $380 mensuales?

15. *(Depreciación)* Juan compró un automóvil nuevo por $10,000. ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 años?

16. *(Depreciación)* Una empresa compró maquinaria nueva por $15,000. Si se deprecia linealmente en $750 al año y si tiene un valor de desecho de $2250, ¿por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de t años de uso y después de 6 años de uso?

17. *(Depreciación)* La señora Olivares compró un televisor nuevo por $800 que se deprecia linealmente cada año un 15% de su costo original. ¿Cuál es el valor del televisor después de t años y después de 6 años de uso?

18. *(Depreciación)* Sea P el precio de adquisición, S el valor de desecho y N la vida útil en años de una pieza de un equipo. Demuestre que, según la depreciación lineal, el valor del equipo después de t años está dado por $V = P - (P - S)(t/N)$.

19. *(Asignación de máquinas)* Una compañía fabrica dos tipos de cierto producto. Cada unidad del primer tipo requiere de 2 horas de máquina y cada unidad del segundo tipo requiere de 5 horas de máquina. Hay disponibles 280 horas de máquina a la semana.

a) Si a la semana se fabrican x unidades del primer tipo y y unidades del segundo, encuentre la relación entre x y y si se utilizan todas las horas de máquina.

b) ¿Cuál es la pendiente de la ecuación en la parte *a*)? ¿Qué representa?

c) ¿Cuántas unidades del primer tipo pueden fabricarse si 40 unidades del segundo tipo se fabrican en una semana particular?

20. *(Asignación de trabajo)* La compañía Boss-Toss manufactura dos productos, X y Y. Cada unidad de X requiere 3 horas de mano de obra y cada unidad de Y requiere 4 horas de mano de obra. Hay 120 horas de mano de obra disponibles cada día.

a) Si x unidades de X y y unidades de Y son fabricadas diariamente y todas las horas de mano de obra se utilizan, encuentre una relación entre x y y.

b) Dé la interpretación física de la pendiente de la relación lineal obtenida.

c) ¿Cuántas unidades de X pueden fabricarse en un día si ese mismo día se hicieron 15 unidades de Y?

d) ¿Cuántas unidades de Y pueden fabricarse en un día si ese mismo día se manufacturaron 16 unidades de X?

21. *(Reducciones de inventarios)* La tienda "El Mayorista" tiene 650 unidades del artículo X en bodega y su promedio de ventas por día de este artículo es de 25 unidades.

a) Si y representa el inventario (de artículos X en bodega) al tiempo t (medido en días), determine la relación lineal entre y y t. (Use $t = 1$ para representar el término del primer día, etcétera.)

b) ¿Cuánto llevará vaciar la bodega?

c) ¿En cuántos días de ventas deberán hacer un nuevo pedido si han decidido hacerlo cuando el nivel de la bodega sea de 125 unidades?

22. *(Ciencias políticas)* En una elección para la Cámara de Representantes de Estados Unidos, se estima que si los Demócratas ganan el 40% del voto popular, obtendrían 30% de los escaños, y que por cada punto porcentual en que aumenten sus votos, su participación en la Cámara se incrementa en 2.5%. Suponiendo que hay una relación lineal $y = mx + c$ entre x, el porcentaje de votos, y y, el porcentaje de escaños, calcúlese m y c. ¿Qué porcentaje de curules obtendrán los Demócratas si ganaran 55% del voto popular?

23. *(Zoología)* El peso promedio W de la cornamenta de un ciervo está relacionada con la edad del ciervo aproximadamente por la ecuación $W = mA + c$. Para ciertas especies se ha encontrado que cuando $A = 30$ meses, $W = 0.15$ kilogramos; mientras que cuando $A = 54$ meses, $W = 0.36$ kilogramos; Encuentre m y c y calcule la edad en la cual W alcanza 0.5 kilogramos.

24. *(Agricultura)* En los últimos 40 años el rendimiento promedio y (en bushels por acre) de maíz en Estados Unidos se ha incrementado con el tiempo t aproximadamente mediante la ecuación $y = mt + c$. En 1950 el rendimiento promedio era de 38 bushels por acre, mientras que en 1965 fue de 73. Calcule m y c. (Tome $t = 0$ en 1950.) Estime cuál será el rendimiento promedio en 1990 suponiendo que la misma ecuación sigue siendo válida.

25. *(Planeación dietética)* En un hospital un paciente que está a dieta de líquidos tiene que escoger jugo de ciruela o jugo de naranja para satisfacer su requerimiento de tiamina que es de 1 miligramo diario. Una onza de jugo de ciruela contiene 0.05 miligramos de tiamina y 1 onza de jugo de naranja contiene 0.08 miligramos de tiamina. Si consume x onzas de jugo de ciruela y y onzas de jugo de naranja diariamente. ¿Cuál es la relación entre x y y que satisface exactamente el requerimiento de tiamina?

26. *(Planeación dietética)* Un individuo que está bajo una dieta estricta planea desayunar cereal, leche y un huevo cocido. Después del huevo, su dieta le permite 300 calorías para esa comida. Una onza de leche contiene 20 calorías y 1 onza (alrededor de una taza llena) de cereal (más azúcar) contiene 160 calorías. ¿Cuál es la relación entre el número de onzas de leche y el de cereal que puede consumir?

■ 4-4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Una gran cantidad de problemas en negocios y economía desembocan en los denominados *sistemas de ecuaciones lineales*. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación.

El propietario de una tienda de televisores desea expandir su negocio comprando y poniendo a la venta dos nuevos modelos de televisores que acaban de salir al mercado. Cada televisor del primer tipo cuesta \$300 y cada televisor del segundo tipo \$400. Cada televisor del primer tipo ocupa un espacio de 4 pies cuadrados, mientras que cada uno del segundo tipo ocupa 5 pies cuadrados. Si el propietario sólo tiene disponibles \$2000 para su expansión y 26 pies cuadrados de espacio, ¿cuántos modelos de cada tipo deberá comprar y poner a la venta haciendo uso completo del capital disponible y del espacio?

Supóngase que el propietario compra x televisores del primer modelo y y del segundo. Entonces, le cuesta \$300x comprar el primer modelo y \$400y comprar el segundo tipo de televisores. Dado que la cantidad total que ha de gastar es de \$2000, es necesario que

$$300x + 400y = 2000 \tag{i}$$

Asimismo, la cantidad de espacio ocupada por los dos tipos de televisores es de $4x$ pies cuadrados y $5y$ pies cuadrados, respectivamente. El espacio total disponible para los dos modelos es de 26 pies cuadrados. Por tanto

$$4x + 5y = 26 \tag{ii}$$

Para encontrar el número de televisores de cada modelo que deberá comprar y poner a la venta, debemos resolver las ecuaciones (i) y (ii) para x y y. Es decir, debemos encontrar los valores de x y y que satisfagan a la vez las ecuaciones (i) y (ii). Obsérvese que cada una de ellas es una ecuación lineal en x y y.