Examen de Matemáticas I
24 de mayo 2019

IES La Estrella SOLUCIÓN

Realiza **uno** de los dos problemas siguientes:(1.5 puntos)

1A.-Determinar razonadamente si la función $f(x)=\dfrac{5}{x^2+2}$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

$f'(x)=\dfrac{-5\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$ $\quad f'(x)=0 \Rightarrow -10x=0 \Rightarrow x=0$

Posible extremo en $x=0$
Estudiamos el crecimiento

$x\in(-\infty,0)$ $\quad x=-1 \quad f'(-1)>0 \quad f$ crece en $(-\infty,1)$

$x\in(0,+\infty)$ $\quad x=1 \quad f'(1)<0 \quad f$ decrece en $(1,+\infty)$

En $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ f alcanza un MÁXIMO relativo

1B.-Determinar razonadamente si la función $f(x)=(x-1)e^x$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \quad x\cdot e^x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

Posible extremo en $x=0$
Estudiamos la monotonía

Si $x\in(-\infty,0)$ $\quad x=-1 \quad f'(-1)=-e^{-1}<0$

f es DECRECIENTE

Si $x\in(0,+\infty)$ $\quad x=1 \quad f'(1)=1\cdot e^1>0$

f es CRECIENTE

Por tanto en $\left(0, f(0)\right) = (0,-1)$ f alcanza MÍNIMO

2.- Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{x+2} - 2x\right)$ en $x = 1$. (1.5 punto)

$f(1) = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-5}{3}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} - 2 \quad f'(1) = \frac{-1}{9} - 2 = \boxed{\frac{-19}{9}}$

Recta tangente: $y - \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{19}{9}(x-1)$

$y = \frac{-19}{9}x + \frac{19}{9} - \frac{5}{3}$

$\boxed{y = -\frac{19}{9}x + \frac{4}{9}}$

.- Sea la función $f(x) = 2x^2 - x^4$.

$f'(x) = -4x^3 + 4x$

$f''(x) = -12x^2 + 4$

j

a) Determinar los intervalos de CRECIMIENTO de f. (0.75 puntos)

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$-4x^2 + 4 = 0 \quad \boxed{x = \pm 1}$

(Posibles extremos $-1, 0, 1$)

Estudiamos el signo de f' en cuatro intervalos

$x\in(-\infty,-1)$ ↗ $x=-2$ $f'(-2)>0$ f CRECIENTE

$x\in(-1,0)$ ↘ $x=-1/2$ $f'(-1/2)=\frac{1}{2}-2<0$ f DECRECIENTE

$x\in(0,1)$ ↗ $x=\frac{1}{2}$ $f'(1/2)=-\frac{1}{2}+2>0$ f CRECIENTE

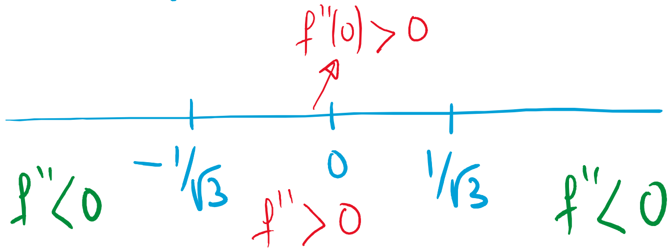
$x\in(1,+\infty)$ ↘ $x=2$ $f'(2)=-32+8<0$ f DECRECIENTE

b) Determinar los intervalos de curvatura de *f*. (0.75 puntos)

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

$-12x^2+4=0$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

CONVEXA $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ∪



CÓNCAVA $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ ∩

c) Dar las coordenadas y clasificar los extremos relativos de *f* (si los tuviera). (0.5 puntos)

$x=1$, $x=-1$ } MÁXIMO RELATIVO

COORDENADAS $(1,1)$ $(-1,1)$ $(0,0)$

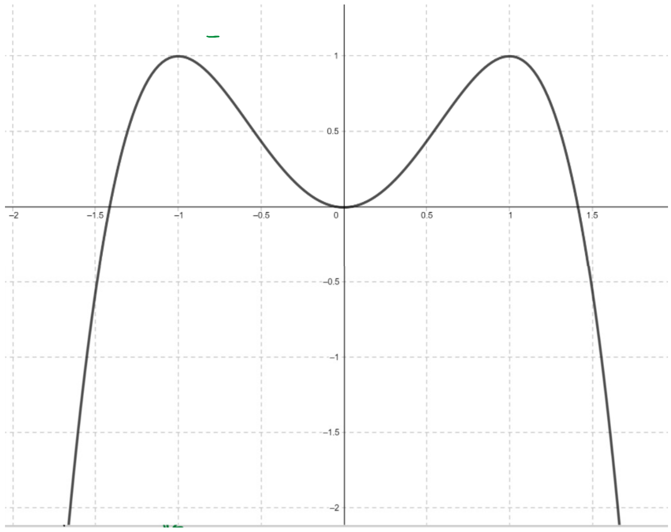
$x=0$ MÍNIMO RELATIVO

d) Dar las coordenadas de los puntos de inflexión de *f* (si los tuviera). (0.5 puntos)

$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ COORDENADAS $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$

$f(1/\sqrt{3})=-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$ $f(-1/\sqrt{3})=\frac{5}{9}$

e) Representar con precisión la gráfica de *f* utilizando los apartados anteriores. (1 punto)



4.- Calcula (y simplifica) las funciones derivadas de las funciones siguientes (1.5 puntos):

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(1-x^2)-(x^2+1)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x-2x^3+2x^3+2x}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

b) $f(x)=\dfrac{senx+\cos x}{2\cos x}$

$$f'(x)=\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)2\cos x-(\operatorname{sen} x+\cos x)(-2\operatorname{sen} x)}{4\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-2\cos^2 x\cancel{-2\operatorname{sen} x\cos x}+2\operatorname{sen}^2 x\cancel{+2\cos x\operatorname{sen} x}}{4\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{2\cos^2 x}$$

$$=\boxed{\frac{-\cos 2x}{2\cos^2 x}}$$

c) $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{\sqrt{x}}+\sqrt{3x}$ $=-x^{-3}-5x^{-1/2}+\sqrt{3}\,x^{1/2}$

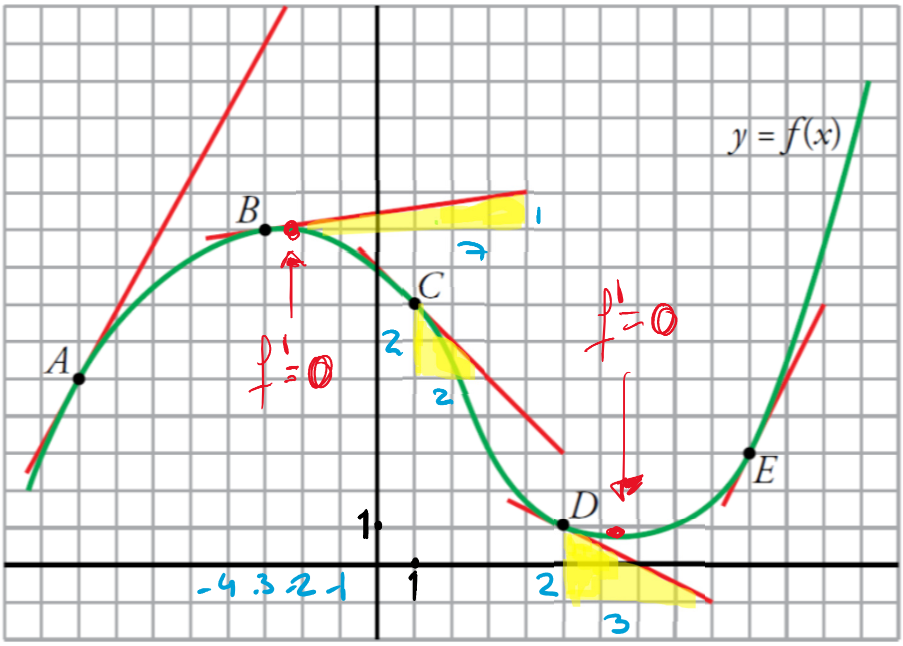
$$f'(x)=3x^{-4}-5\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}+\sqrt{3}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{x^4}+\frac{5}{2x\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$

d) $f(x)=(x^2-1)\ln(x^2-1)$

$$f'(x)=2x\ln(x^2-1)+\frac{(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)}=2x\ln(x^2-1)+2x=$$

$$=2x\left(\ln(x^2-1)+1\right)$$

5.- En la gráfica, en verde, de la función $y = f(x)$ adjunta, se han señalado cinco puntos: A, B, C, D y E.



(1.5 puntos)

a) ¿Cual es el valor de de f'(5), f'(-3)?

$f'(5) = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $f'(-3) = \frac{1}{7}$

b) ¿En qué puntos es f'(x) = 0?

Aproximadamente en $x = 6'5$ y $x = -2'5$

c) Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto C

En $C: (1,7)$ la pendiente de la tangente es $m = -1$

y por tanto $f'(1) = -1$

Recta tg: $y - 7 = -1(x - 1)$ $\quad \boxed{y = -x + 8}$