# Ejercicios de repaso de Matemáticas I

# Parte I

La siguiente colección de problemas y ejercicios de Matemáticas I sólo debe ser considerada como una selección de problemas que cubran la totalidad de la aasignatura. Nunca debe entenderse que lo que no está en esta lista de problemas, no entre en el examen extraordinario.

Los contenidos de tales exámenes se corresponden con el currículo impartido y explicado por los profesores. Dicho currículo es el marco de referencia del examen.

No se recopilan en estas páginas los contenidos de la asignatrura. Sólo se seleeccionan algunos ejercicios con los que el alumno debe practicar. Los ejercicios elementales de cada materia, así como los ejercicios repetitivos no se incluyen en esta colección. Para ello se remite al alumno al libro de texto de la asignatura y a todos sus ejercicios resueltos que llevan a disposición del alumno todo el curso en:

https://free62767.wordpress.com/mat-i/

# Cálculo algebraico

1. Calcula y simplifica el resultado de las siguientes expresiones algebraicas evaluándolas en los puntos que se indican a continuación. Después opera y simplifica la fracción inicial.

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=$$

a) x = 2 b) x = 4 c) y = 3

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=$$

a) x = 1 b) x = -2 c) y = -4

$$\frac{ax-a}{x+1}-\frac{ax+a}{x-1}=$$

a) a = 2 b) a = -3 c) a= -1

$$\frac{x^3}{(x+b)^3}-\frac{xb}{(x+b)^2}+\frac{b}{x+b}=$$

a) b = 2 b) b= -1 c) a= -1

2. Opera y simplifica:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}=$$

$$\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}=$$

3. Opera y simplifica

$$\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}.$$

$$\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}.$$

$$\frac{ax}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}.$$

$$\frac{ax-a}{x+1}-\frac{ax+a}{x-1}.$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right).$$

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right).$$

$$\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)+1\right]\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)-1\right]$$

$$\left(x+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

$$\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right).$$

$$\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right).$$

$$\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left[1-\frac{1+ab}{a(b-a)}\right].$$

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

$$\left(\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right).$$

4. Utiliza el binomio de Newton para desarrollar la siguiente potencia. Proporciona el resultado simplificado al máximo sin potencias negativas ni fraccionarias:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^4=$$

5. Utiliza el resultado anterior para obtener el valor del siguiente cálculo como una expresión radical: $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^4=$

6. Sean los conjuntos:

   $A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ -3<x\leq 2\}$ y $\quad B$: $|1+2x|<2|x-2|$

   Escribe A y B como intervalos y proporciona como <u>intervalo</u> el conjunto <u>intersección</u> de ambos, es decir los elementos <u>comunes</u> a ambos conjuntos (A∩B).

# Radicales, logaritmos y exponenciales

1. Calcula y simplifica al máximo el resultado racionalizando si fuera preciso:

$$\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=$$

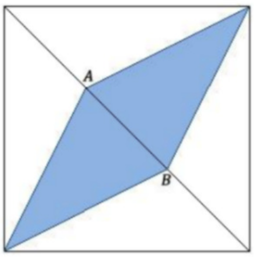
2. Calcula y simplifica el resultado al máximo. Proporciona el resultado como radical:

$$\frac{1}{3}\sqrt{18a^5b^3}+\frac{3ab\sqrt{32a^3b}}{4}-a^2b\sqrt{\frac{2ba^3}{25a^2}}=$$

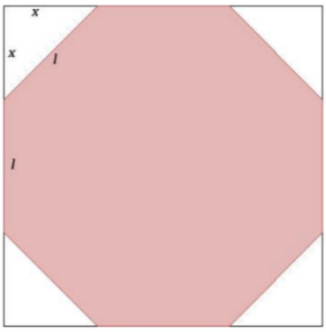
3. Comprueba la veracidad de la siguiente igualdad. Ayuda: racionaliza cada fracción del miembro de la izquierda. Opera y simplifica. Luego trabaja el miembro de la derecha.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$$

4. Los puntos *A* y *B* dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es de 36 cm2, ¿Cuánto medirá el lado del rombo? Proporciona el resultado como expresión radical, ni decimal.




5. En un cuadrado de 10 cm de lado, recortamos en cada esquina un triángulo rectángulo isósceles de forma que obtenemos un octógono regular. Halla la medida del lado del octógono como una expresión radical y calcula su área.




6. Calcula sin utilizar la calculadora:

$$log\sqrt{5}-10\ln(e^3)-\log(0.000001)-log\sqrt{500}=$$

7. Si $\log C=1$ y que $\log 2=0.3$, calcular:

   a. $\log_2\sqrt{\dfrac{2}{C}}=$ b. $\log\dfrac{200}{0.25\sqrt{C}}=$

8. Prueba que el valor de la siguiente expresión siempre es la misma

$$\frac{\log\frac{1}{a}+\log\sqrt{a}}{\log a^3}=$$

independientemente del valor de *a* ( *a* ≠ 1). Calcula dicho valor.

# Resolución de ecuaciones

Calcula el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Escribe la solución como intervalo o como operaciones entre intervalos según convenga.

(a) $|x| + 2 \leq 5$ (b) $|3x + 9| > 4$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones, recuerda comprobar si las soluciones obtenidas son correctas:
   a) $|2x + 1| - |2 - x| = 5x + 2$
   b) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 \left(\frac{x^2}{y^3}\right) = -4 \end{cases}$
   c) $9 \cdot 2^{2x^2+4} - 24 \cdot 2^{x^2+2} - 8^{x^2+2} + 16 = 0$
   d) $\log(2x-3) + \log(3x-2) = 2 - \log 25$
2. Resolver la siguiente ecuación exponencial.

$$3 \cdot e^{-0,5 \cdot (x^2 - 10)} = 72$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

   b.

$$\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}} = 1$$

   c.

$$\frac{x}{1 - \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{2}}} = \frac{1}{12}$$

4. Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -2 \\ -x - 2y + z = -6 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

5. Discutir y resolver, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2z = 16 \\ -y + x + 2z = -4 \\ -z + 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

6. Desarrolla el siguiente polinomio y factorízalo

$$(2x-3)^2-(x-1)^4$$

7. Resuelve el siguiente sistemas de ecuaciones y comprueba las soluciones:

$$\begin{cases} \log(x^2+y)-\log(x-2y)=1 \\ 5^{x+1}=25^{y+1} \end{cases}$$

8. Resuelve la siguiente ecuación irracional y comprueba las soluciones.

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}-1=\sqrt{x^2-1}$$

9. Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Con centro en cada vértice se dibujan tres de conferencias, tangente entre sí dos a dos. Calcular las longitudes de los radios de las circunferencias. Ayuda: Haz un dibujo.

10. En un laboratorio químico se sabe que mezclando 24 unidades de masa de A, 6 de B y 12 de C se obtienen 156 unidades de masa de un compuesto determinado. Calcular el peso de cada sustancia, sabiendo que 1 parte de C tiene el triple de masa que una parte de A, y que una parte de B es equivalente a cuatro partes de A más cuatro de C. Resolver por el método de Gauss.

# Números complejos

1. Dados los números complejos *z, w* y *v* realizar los cálculos indicados:

$$z = 2 - 3i \quad w = -1 - 2i \quad v = -3 + 3i$$
$$2z; \quad -3w; \quad z - w; \quad -(2z + 3v)$$
$$z^2; \quad \frac{z}{i}; \quad i \cdot (w - z)^2; \quad -\frac{w}{z}$$

2. Responde verdadero o falso
   a. El conjugado del opuesto es igual que el opuesto del conjugado. V❑ F❑
   b. La suma de un complejo y su conjugado es un numero real. V❑ F❑
   c. El producto de un complejo por su conjugado es un número real. V❑ F❑
   d. El conjugado del conjugado, es el complejo inicial. V❑ F❑
   e. El conjugado de la suma es la suma de los conjugados. V❑ F❑
   f. El producto de los conjugados es el conjugado del producto. V❑ F❑
   g. El cuadrado del conjugando es el conjugado del cuadrado. V❑ F❑
   h. Multiplicar por *i* un complejo es obtener su conjugado. V❑ F❑
   i. Dividir un complejo por i, es lo mismo que obtener su conjugado. V❑ F❑
   j. El producto de dos imaginarios puros es un real. V❑ F❑
   k. La suma de dos imaginarios puros es un imaginario puro. V❑ F❑

3. Dadas las siguientes ecuaciones se pide:

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 + 2x + 4 = 0$$

   a. Resuelvelas utilizando números complejos. ¿Cómo son los números complejos que han aparecido como solución?
   b. Factoriza el polinomio de segundo grado correspondiente utilizando el apartado anterior
   c. Multiplica los factores anteriores para comprobar que se obtiene el polinomio inicial.

4. Resolver la ecuación compleja:

$$z^5 + 32i = 0$$

   Proporcionar las soluciones en forma polar y binómica.

5. Realiza la siguiente operación con números complejos. Proporciona la solución en forma binómica.

$$\frac{3+i}{1-i} - \frac{5}{i^{18}} + \frac{(1+i)\cdot(1-i)}{1-i^2} =$$

6. Calcula:

$$\left(\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{4_{15^{\circ}}}\right)^2 =$$

7. Calcula el valor de *a* para que el número $z=\frac{3+ai}{a+2i}$ sea a) Real b) Imaginario puro
8. Hallar las soluciones reales y complejas de la siguiente ecuación de tercer grado. Descomponer el polinomio en producto de factores primos complejos.

$$x^3+3x^2+4x-8=0$$

9. Un cuadrado de centro el origen O, tiene uno de sus vértices en el punto A(2,3). Calcula las coordendas cartesianas de los restantes vértices utilizando los numeros complejos y sus operaciones.
10. Resuelve la ecuación siguiente: $z^2-4i\,z-5=0$
11. Resuelve la ecuación compleja siguiente $iz^2-(2+i)\,z=0$
12. Resuelve las ecuaciones complejas siguientes:
    a) $iz^2-(2+i)\,z=0$
    b) $(2-i)z^4-i=3+(1+i)\,z^4$
13. Realiza la siguiente operación. Proporciona la solución en forma binómica.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

14. Calcula $\frac{(4-2i)i^5}{1+i}+\frac{i^{30}(5-i)}{-1+i}=$
15. Utilizando sólo números complejos, halla el perímetro de un pentágono regular que tiene un vértice en el punto A(-1, 0). Calcula también su área (utiliza cualquier método convenientemente razonado)

# Trigonometría . Aplicaciones de la trigonometría

1. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica con $0 \leq x \leq 2\pi$. (Proporciona la solución en radianes y en grados sexagesimales)

$$sen2x = cotgx$$

2. Dados dos ángulos α y β, con $\pi/2 < \alpha < \pi \qquad \pi < \beta < 3\pi/2$ y de los que se conoce $sen\ \alpha = 2/5$ y $\cos\ \beta = -1/3$, hallar c$\cos(\alpha - \beta) \quad y \quad sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

3. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa vale
$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\ \alpha - \operatorname{cotg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{cosec}\ \alpha + \operatorname{cotg}\ \alpha}$$
y uno de los catetos mide
$$\frac{2\cdot(1+\cos 2\alpha)}{sen2\alpha}$$
hallar la longitud del otro cateto.

4. Demuestra que en todo triángulo ABC se verifica que
$$tg\hat{A} + tg(\hat{B} + \hat{C}) = 0$$

5. Resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes proporcionando todas las soluciones en radianes y en grados.

a) $\cos x\ tg\ x = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x + sen\ 2x = 1$

c) $\cos 2x - sen\ 2x = 0$

d) $sen\ 2x + \cos x = 1$

e) $sen\ 2x + sen\ 2x = 0$

f) $tg\, x + sen\, x = 0$

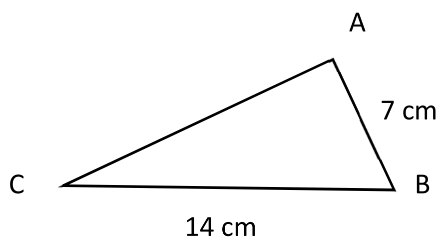
g) $tg\, x - sen\ 2x = 0$

h) $\frac{sen\ (60^\circ - x)}{\cos\ x} = 1$

i) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0$

j) $sen\ (x + 30^\circ) + \cos\ (x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

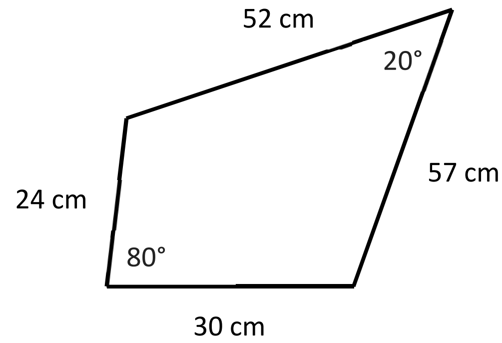
6. Utiliza los datos numéricos de la figura para calcular los lados y ángulos del siguiente triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo?



7. Demuestra que dado un ángulo $\alpha$ cualquiera, se cumple la siguiente igualdad

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$$

8. Sabiendo que $\cos\alpha = -0{,}21$ 30° y $\alpha \in III$ calcula:
    a) $tg(270 + \alpha)$
    b) $cos(810 - \alpha)$
    c)
9. Calcula el área del siguiente cuadrilátero.




10. Queremos calcular la altura de un acantilado si sabemos que estamos viendo su punto superior con un ángulo de 30° y que si nos acercamos 20 metros a la base pasamos a verlo con un ángulo de 45°
11. Calcula las siguientes razones trigonométricas
    a) $sen\, 135°$
    b) $ctg\, 300°$
    c) $cos\, 780°$
    d) $sec\, 240°$
    e) $tg\, 225°$
    f) $cos\, 330°$

12. Una escultura de 2,5 metros está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15º y la estatua bajo un ángulo de 40º. Calcular la altura del pedestal.

13. Desde la torre de control de un aeropuerto que mide 40 m de altura se establece comunicación con un avión. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1200 m y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal es de 30º. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre de control?

14. En un rectángulo ABCD de lados 8 y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC, y desde D, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a ña diagonal. Hallar la longitud del segmento MN.