

Ejercicios de repaso de Matemáticas I

Parte II

La siguiente colección de problemas y ejercicios de Matemáticas I sólo debe ser considerada como una selección de problemas que cubran la totalidad de la asignatura. Nunca debe entenderse que lo que no está en esta lista de problemas, no entre en el examen extraordinario.

Los contenidos de tales exámenes se corresponden con el currículo impartido y explicado por los profesores. Dicho currículo es el marco de referencia del examen.

No se recopilan en estas páginas los contenidos de la asignatura. Sólo se seleccionan algunos ejercicios con los que el alumno debe practicar. Los ejercicios elementales de cada materia, así como los ejercicios repetitivos no se incluyen en esta colección. Para ello se remite al alumno al libro de texto de la asignatura y a todos sus ejercicios resueltos que llevan a disposición del alumno todo el curso en:

<https://free62767.wordpress.com/mat-i/>

Fórmulas trigonométricas

1. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa vale

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha - \cotg \alpha} + \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha + \cotg \alpha}$$

y uno de los catetos mide $\frac{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)}{\operatorname{sen} 2\alpha}$ hallar la longitud del otro cateto.

Geometría vectorial y lineal.

1.-

Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 120^\circ$.

2.-

Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices:

$$A(3, 8) \quad B(5, 2) \quad C(1, 0) \quad D(-1, 6)$$

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

3.-

4.- Dados los puntos P (13, 8) y Q(-2,-4)

- a) Encontrar un tercer punto que no forme un triángulo con P y Q. (0,25)
- b) Encontrar el punto simétrico de P respecto de Q. (0,5)
- c) Encontrar los puntos A y B que dividen el segmento PQ en tres partes iguales. (0,75)

5.-

En el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, -4)$, halla las ecuaciones de:

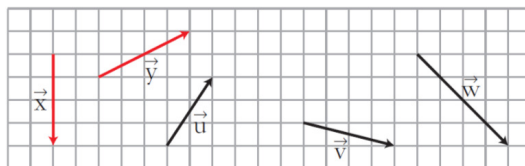
- a) La altura que parte de B.
- b) La mediana que parte de B.

6.-

La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, el segmento AB. Halla la ecuación de la mediatriz de AB.

7.-

Escribe los vectores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} como combinación lineal de \vec{x} e \vec{y} .



¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

8.-

En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de \vec{v} en la base $B = \{(1, -1), (0, -1)\}$.

9.-

En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F. Calcula los productos:

- a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$
- b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$
- c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$
- d) $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

10.-

Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:

- a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que \vec{u} .
- b) Los vectores ortogonales a \vec{u} que tengan el mismo módulo que \vec{u} .
- c) Los vectores unitarios y ortogonales a \vec{u} .

11.-

Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b , sabiendo que \vec{u} y \vec{v} son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

12.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

Geometría lineal y métrica.

1. De un rombo sabemos que dos de sus vértices opuestos son los puntos $A = (-2, 4)$ y $C = (2, 2)$ y que el lado mide 5 unidades. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices B y D.
2. Dados los puntos $P(13, 8)$ y $Q(-2, -4)$
 - a. Encontrar un tercer punto que no forme un triángulo con P y Q. $(0, 25)$
 - b. Encontrar el punto simétrico de P respecto de Q. $(0, 5)$
 - c. Encontrar los puntos A y B que dividan el segmento PQ en tres partes iguales. $(0, 75)$
3. Expresa todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A = (-1, 1)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv 2x - y + 3 = 0$
4. Indica todos los vértices de un rectángulo del que sabemos que dos de sus vértices opuestos son el $A = (-2, 4)$, $C = (3, 4)$ y que dos de los lados son paralelos a la recta $r \equiv 2x + y + 6 = 0$:
5. Dados los puntos $A = (-3, 3)$, $B = (5, 5)$ y $C = (3, -3)$
 - a. Expresa las ecuaciones continua, implícita y explícita de la mediana de A del triángulo.
 - b. Indica el baricentro del triángulo.
6. Indica los vértices de un rectángulo del que sabemos que una de las diagonales está sobre en el eje X, el vértice A es el punto $(4, 3)$ y dos de los lados son paralelos a la recta $y = 3x + 8$
Dada la recta $r \equiv x - 2y + 1 = 0$:
 - a. Expresa la ecuación de una recta paralela a r que pase por el punto $P = (2, 1)$
 - b. Calcula la distancia de P a r
7. Dados los puntos $P = (-2, 2)$ y $Q = (0, -2)$:
 - a. Expresa la ecuación de los puntos que equidistan de P y Q.
 - b. Expresa las ecuaciones de las rectas que distan $2\sqrt{5}$ de los puntos P y Q.
 - c. Indica los vértices de un rombo que tenga P y Q como vértices opuestos y cuya área sea de $20u^2$
8. Dadas las rectas $r \equiv 3x - 4y + 8 = 0$ y $s \equiv 3x + 4y - 8 = 0$:
 - a. Expresa la ecuación de una recta t paralela a s que diste 3 unidades de s.

- b. Indica un punto de la recta t que diste 3 unidades de r .
9. Dados los puntos $A = (0, -2)$, $B = (-3, 2)$ y $C = (-3, -2)$
- Expresa la recta que divide el ángulo \hat{A} del triángulo en dos partes iguales.
 - Expresa las ecuaciones de las rectas que equidistan de los lados b y a del triángulo.
 - Calcula el incentro del triángulo.
10. Determinar un punto P de la mediatriz del segmento de extremos los puntos $A(7, 1)$ y $B(1, 3)$ sabiendo que la distancia de dicho punto al eje OY es doble que al eje OX .
11. Calcular el área del triángulo de vértices $P(1, 1)$ $Q(2, -4)$ $R(5, 2)$. Describe el procedimiento que usas.
12. Determinar la ecuación de todas las rectas cuya distancia al origen de coordenadas sea de 2 unidades y estén dirigidas por el vector director $\vec{v} = (-12, 5)$.
13. Calcula el punto simétrico del punto $P(-2, -1)$ respecto de la recta
- $$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}$$
14. Dado el rombo de vértices $ABCD$ sabemos que A es el origen de coordenadas y que $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.

Funciones elementales. Límites y continuidad

1.- Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{2-x}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

c) $f(x) = -\sqrt{x^2-4}$

d) $f(x) = \ln(x^2+3)$

e) $f(x) = \ln(x^2-9)$

f) $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$

g) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

h) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$

i) $f(x) = \frac{x^3-1}{x+2}$

j) $f(x) = \frac{2}{x^2+2}$

k) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4}}$

l) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2}$

2.- Determina el dominio de definición de las funciones

a) $f(x) = \log\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

b) $f(x) = \log(x-1)$

c) $f(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$

3.- Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2$ se pide:

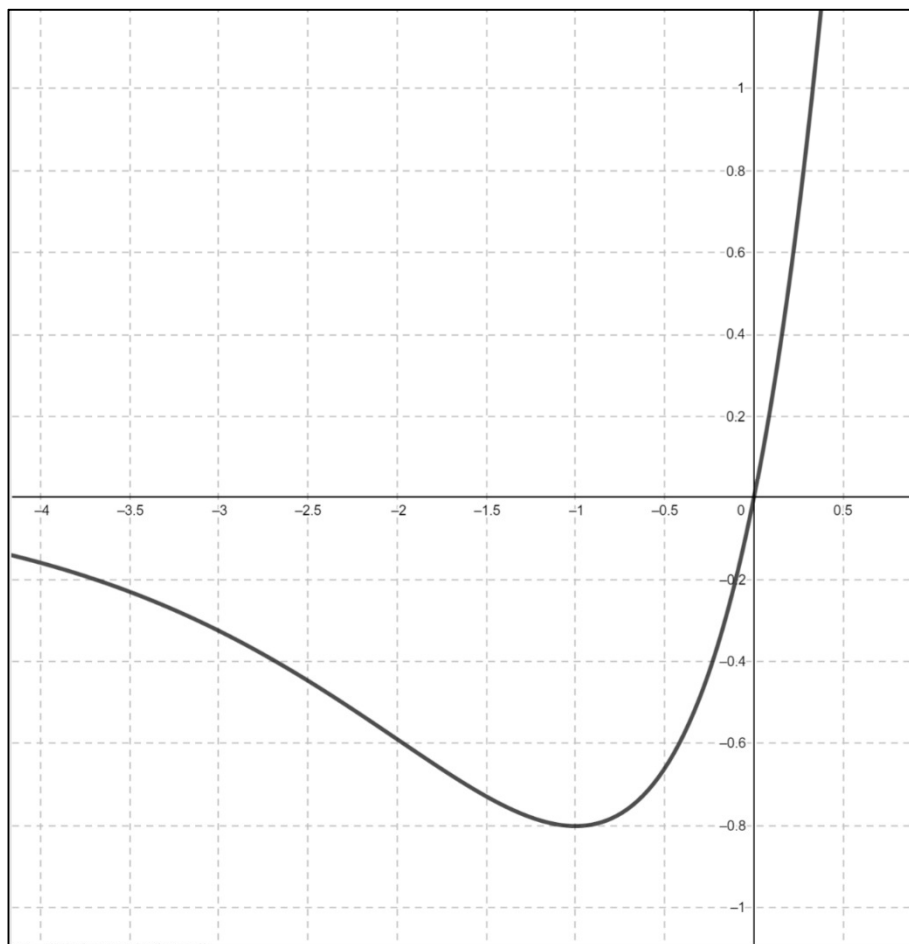
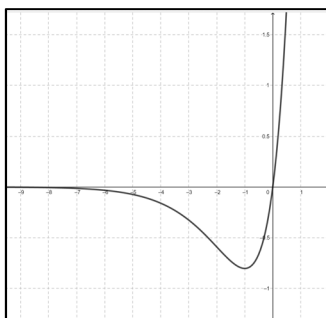
- i. Proporcionar los intervalos en los que función tiene signo constante (y dar su signo, claro).
- ii. **Esbozar** la gráfica de f obteniendo algún punto extra de su gráfica.

4.- El valor de un paquete de acciones (en miles de euros) viene dado por la función $v(x) = -(x-1)^2 + 4(x+2)$ donde x mide el tiempo transcurrido desde que comenzó su cotización en bolsa medido en meses.

- Determinar el valor de las acciones cuando comenzó su cotización.
- Decidir en qué momento deben venderse todas las acciones para maximizar los beneficios.
- ¿En qué momento sería mejor vender las acciones, a los dos o a los cuatro meses de su cotización?
- Llegarán las acciones a perder todo valor? En ese caso, ¿cuándo?

5.- Dada la siguiente gráfica de una función, se pide determinar con precisión:
(no respondas sobre la gráfica ni en el problema, no se corrige):

- Dominio y recorrido (0.5 puntos)
- $f^{-1}(-0.4)$, $f^{-1}(0)$
- Intervalos de monotonía
- Intervalos de curvatura
- Intervalos de signo constante
- Coordenadas de los máximos y mínimos absolutos si los hubiera
- Coordenadas de los máximos y mínimos relativos si los hubiera
- Si tuviera asíntotas dar sus ecuaciones e indicar el tipo de asíntota.)
- ¿Está acotada la función? ¿Tiene alguna cota? ¿Cuál?



6.- Calcular razonadamente los siguientes límites.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 12} \right) & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 2}{x + 1} - 2 \right) & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \right) \right) \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (0.75)^{\frac{1}{x}} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{\frac{-2}{x-4}} \right) & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{x^2}{x-1}} \end{array}$$

7.-Calcular razonadamente las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{6x^3 - 1}{2x^2 - 2}$$

8.- Determinar razonadamente las asíntotas horizontales y verticales de la función:

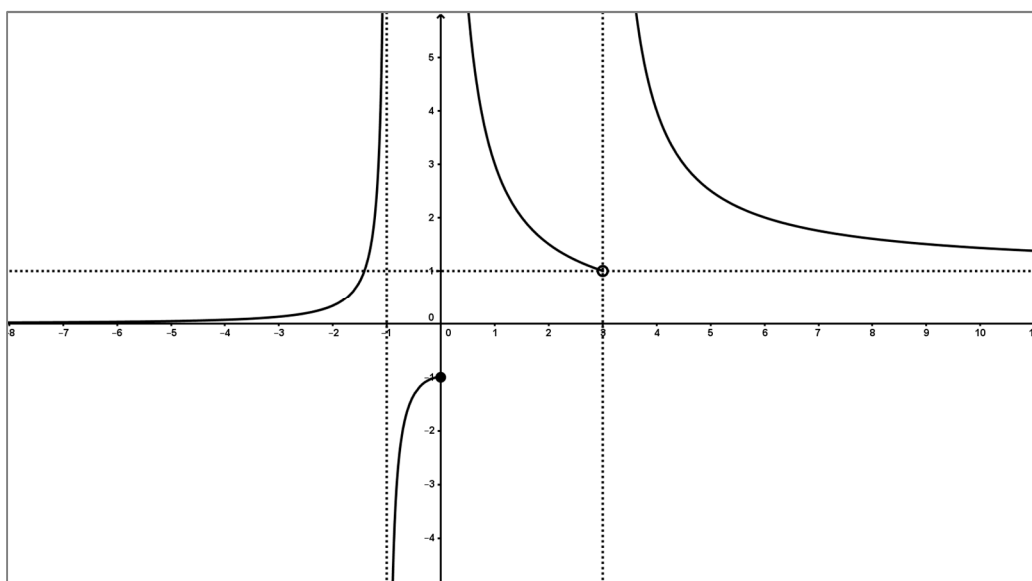
$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 + 6x + 9}$$

- Representar con precisión en unos ejes cartesianos las asíntotas encontradas.
- Estudiar la función en las proximidades de sus puntos de discontinuidad y representar la función alrededor de ellos.

9.- Calcular el valor de **a** y **b** para que la siguiente función sea continua en $x = 0$ y $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

10.- A partir de la gráfica de la función f representada a continuación responder a las cuestiones siguientes:



a) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$	e) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$	f) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$
g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$	h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$	

b) Determinar el dominio de definición de f .

.....

c) Proporcionar las ecuaciones de las asíntotas de la función (si las tuviera).

.....

11. Calcula el siguiente límite:

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x-7} \right)^{2x-5}$

13. Dada la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2-9} & \text{si } x < 4 \\ \sqrt{8-x} - \frac{13}{7} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a. Estudia su dominio.

b. Estudia su continuidad.

14.- Tras unos estudios se ha establecido que el nivel de concentración de un estudiante que estudiara en sesiones de 5 horas, viene dado por la función

$$R(t) = -10((t-2)^2 - (t-2)) + 90, \text{ con } 0 \leq t \leq 5$$

donde t expresa el tiempo (en horas) transcurrido desde que el estudiante comienza a estudiar.

Según los consejos de algún *iluminado*, los estudiantes hacen un descanso a las dos horas de comenzar la sesión de estudio. Supongamos que un estudiante comienza su estudio a las 9 de la mañana.

a) Representa la función R .

b) Determinar los intervalos horarios en los que su concentración aumenta.

c) Determinar los momentos en los que el estudiante estudia con máxima y con mínima concentración.

d) Desmentir razonadamente el consejo del *iluminado* que lleva a descansar a los estudiantes a las dos horas. ¿Cuál sería tu consejo a esos estudiantes?

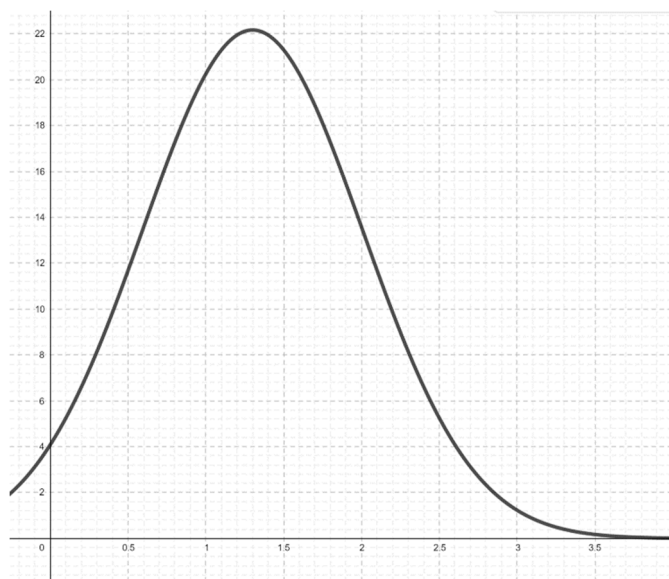
15.- El número de nuevos lectores de las nuevas entradas de un blog (en miles) varía con el tiempo según la función

$$f(t) = 3 \cdot e^{-(t-1.3)^2 + 2}$$

siendo t el tiempo (en semanas) transcurrido desde la publicación de la entrada en el blog. La gráfica de la función está representada en la imagen.

Se pide:

- Determinar cuando el número de lectores vuelven a ser los mismos que cuando se realiza la publicación.
- Determinar cuándo se espera disponer de 15.000 lectores.
- Averiguar los visitantes que hay: al comenzar, tras 1 semana y después de 1 mes y medio.
- Indica cuando comienzan a disminuir los espectadores.



16.- El gasto de una gestoría es una **función lineal** de los expedientes que gestiona. Se sabe que los gastos son de 2000€ si se gestionan 12 expedientes. Además por cada 4 expedientes extras sobre los 12, el gasto se incrementa en 500€. Determinar la función G que modeliza el gasto de dicha gestoría.

17.- El precio de un coche adquirido por 17000 € cambia su valor según la función

$$V(t) = 0.1(t-10)(t-17) \text{ (en miles de euros)}$$

en la que t representa el tiempo que ha pasado desde que se adquirió el coche. En esta situación responder Verdadero o Falso a las siguientes cuestiones (la gráfica de la función puede ayudarte)

- Si se vende el coche a los dos años y medio su valor será de 11660€.
- Después de siete años el coche no vale nada.
- Si se vende después de los 4 años el coche valdrá menos de la mitad de su valor de compra.
- Si se vende a los dos años y medio el coche habrá perdido la mitad de su valor de compra

Derivación de funciones

1.-Determinar razonadamente si la función $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

2.-Determinar razonadamente si la función $f(x) = x e^x$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

3.- Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{x+1} - x\right)$ en $x = 1$.

4.- Sea la función $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

- Determinar las funciones derivadas de orden uno y dos de f .
- Determinar los intervalos de monotonía de f .
- Determinar los intervalos de curvatura de f .
- Dar las coordenadas y clasificar los extremos relativos de f (si los tuviera).
- Dar las coordenadas de los puntos de inflexión de f (si los tuviera)
- Representar con precisión la gráfica de f utilizando los apartados anteriores.

5.- Calcula (y simplifica) las funciones derivadas de las funciones siguientes

- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{2}}$
- $f(x) = x^2 e^{x^3}$
- $f(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x+1}$
- $f(x) = (x-1)e^{x^2}$
- $f(x) = -2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$
- $f(x) = x e^{-x}$
- $f(x) = e^{3x^2+x}$
- $f(x) = \frac{x e^{3x}}{e^x}$
- $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$
- $f(x) = \frac{3}{3x^2-x}$
- $f(x) = \ln(\sqrt{x} + x)$

n) $f(x) = \sqrt{x + \ln(x)}$

o) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

p) $f(x) = \ln(2x^3 - 3x^2)$

q) $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$

r) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

6.- Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x+2} - \sqrt{2x}$ en $x = 2$.

7.- Determina el dominio de definición de la función $f(x) = \log\left(\frac{3}{x^2 - 16}\right)$

8.- El nivel de contaminación (en miligramos por m³) de NO₂ en una ciudad evoluciona a lo largo de un día según la función

$$N(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 12t + \frac{25}{2}$$

donde t mide el tiempo (en horas) transcurrido desde las 6:0 a.m. que es cuando comienza el registro diario de los niveles de NO₂.

- Decidir razonadamente en qué momento del día la contaminación es máxima y determinar el valor máximo.
- ¿A qué hora(s) del día la contaminación es mínima? ¿Cómo lo averiguas?
- ¿Llega la contaminación a ser cero en algún momento del día? ¿Por qué? En ese caso, ¿cuándo?

9.- Sea la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$. Utilizando procedimientos de cálculo con derivadas:

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f .
- Dar las coordenadas y clasificar los extremos relativos de f (si los tuviera)
- Dar las coordenadas de los puntos de inflexión de f (si los tuviera).
- Representar con precisión la gráfica de f utilizando los apartados anteriores.