Examen de Matemáticas I. Funciones (I)
29 de abril 2019

IES La Estrella SOLUCION

Todos los problemas deben desarrollarse adecuadamente con claridad. No se aceptan respuestas sin procesos.

1. Calcular la distancia entre las rectas siguientes. (0,75 puntos)

$$r \equiv 5x - y = -4$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -3 - \frac{1}{5}t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

a) Posición relativa de las rectas.

$\vec{v}_r = (1,5)$ $\vec{v}_s = (-\frac{1}{5}, -1)$ claramente paralelos.

Como $(-3,4) \notin r$ $(-15-4 \neq -4)$ las rectas son paralelas.

$$d(r,s) = d((-3,4),s) = \left| \frac{5(-3)-4+4}{\sqrt{25+1}} \right| = \frac{15}{\sqrt{26}} \text{ u.}$$

2.- Determina el dominio de definición de la función $f(x) = \log\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)$ (1 punto)

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \quad 9 - x^2 > 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \quad -3 < x < 3 \right\} = \boxed{(0,3)}$$

3.- El valor de un paquete de acciones (en miles de euros) viene dado por la función $v(x) = -(x-1)^2 + 4(x+2)$ donde x mide el tiempo transcurrido desde que comenzó su cotización en bolsa medido en meses.

i. Decidir en qué momento deben venderse todas las acciones para maximizar los beneficios. (0,5 puntos)

Como $v(x) = -x^2 + 6x + 7$ el máximo del valor se alcanzará en el vértice de la parábola.

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Como $a = -1$ la parábola tiene en su vértice el máximo ABSOLUTO.

Sol: A los 3 MESES

ii. ¿En qué momento sería mejor vender las acciones, a los dos o a los cuatro meses de su cotización? (0,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} V(2) = -4+12+7 = 15 \\ V(4) = -16+24+7 = 15 \end{array}\right\}$$ El valor es el mismo en ambos momentos y es de 15000 €

iii. Llegarán las acciones a perder todo valor? En ese caso, ¿cuándo? (0, 5 puntos)

$V(x)=0 \Rightarrow -x^2+6x+7=0$ $\quad x = \dfrac{-6\pm\sqrt{36+28}}{-2} = \dfrac{-6\pm 8}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 7 \end{cases}$

A los 7 meses

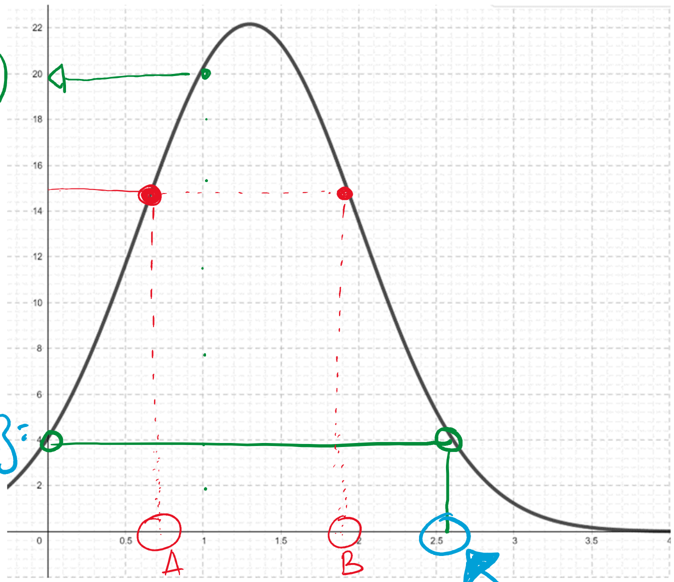
4- El número de casos por una infección vírica (en miles) varía con el tiempo según la función

$$f(t) = 3\cdot e^{-(t-1.3)^2+2}$$

siendo t el tiempo (en semanas) transcurrido desde el inicio de la infección. La gráfica de la función está representada en la imagen.

Se pide:

i. Determinar cuando el número de infectados vuelven a ser los mismos que cuando se inició la infección. (0,5)



$f(0) = 3e^{-(-1.3)^2+2} = 3e^{0'31} = 3\cdot 1'363 =$

$= 4'089 \simeq 4'090$

Ahora resolvemos $\quad 4'090 = 3e^{-(t-1'3)^2+2}$

$\ln\left(\dfrac{4'09}{3}\right) = -(t-1'3)^2+2$

$0'34-2 = -(t-1'3)^2; \quad 1'69 = (t-1'3)^2;$

$\pm 1'3 = t-1'3; \quad \boxed{t = 2'6}$

semanas

$\boxed{t = 0}$

(15 MIL)

Los puntos A y B de la gráfica

ii. Determinar a partir de qué momento habrá menos de 15.000 enfermos. (0,5)

Repitiendo lo anterior se llega a:

$\ln\left(\frac{15}{3}\right) = -(t-1'3)^2+2$; $1'609-2=-(t-1'3)^2$;

$0'39=(t-1'3)^2$; $t-1'3=\pm 0'624$ $t=1'3\pm 0'624=\begin{cases}1'924\\0'676\end{cases}$

iii. Averiguar los enfermos que hay tras 1 semana y después de 1 mes y medio. (0,25)

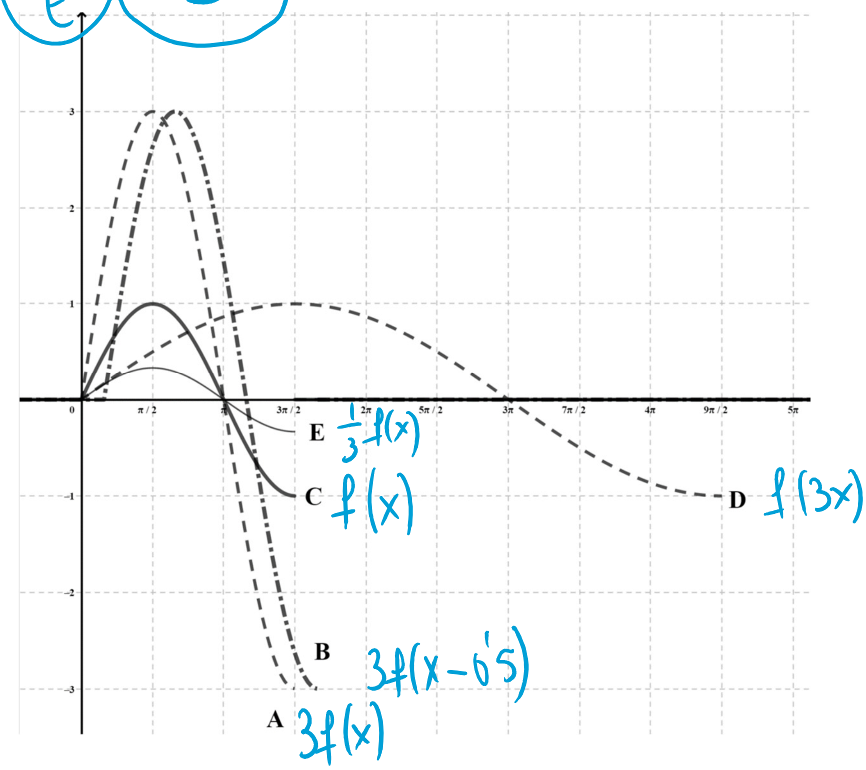
$f(1)=3\cdot e^{-(1-1'3)^2+2}=20'259$

$f(6)=3\cdot e^{-(6-1'3)^2+2}=5'65\cdot 10^{-9} \rightsquigarrow 0$

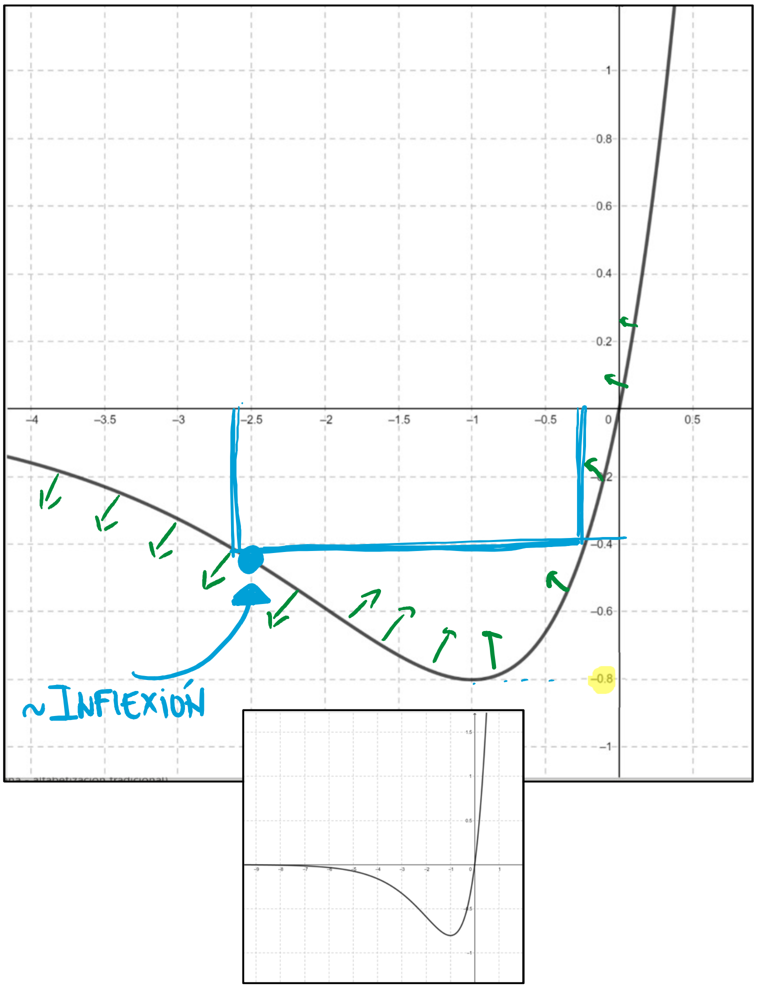
iv. ¿Qué se puede decir del proceso de curación de la enfermedad? (0,25)

Que será completo y la infección erradicada.

6.- En el dibujo tienes la gráfica de f(x). Además se han representado las gráficas de las funciones $f(x)$ C, $3f(x)$ A, $f(3x)$ D, $\frac{1}{3}f(x)$ E, $3f(x-0.5)$ B explicando claramente el porqué de tu elección. (1.5)



7.- Dada la siguiente gráfica de una función con dominio todos los números reales, se pide determinar con precisión: (2 puntos)
(no respondas sobre la gráfica ni en el problema, no se corrige):



i. Recorrido (0.25 puntos)

$Re(f) = Im(f) = [-0'8, +\infty)$

ii. $f^{-1}(-0.4)$, $f^{-1}(0)$ (0.25 puntos)

$f^{-1}(-0'4) \simeq \{-0'25, -2'6\}$
$f^{-1}(0) = 0$

iii. Intervalos de monotonía (0.25 puntos)

f ES CRECIENTE EN $(-1, +\infty)$
f ES DECRECIENTE EN $(-\infty, -1)$

iv. Intervalos de curvatura (0.25 puntos)

f ES CONVEXA (∪) EN $(-2'5, +\infty)$
f ES CÓNCAVA (∩) EN $(-\infty, -2'5)$

v. Intervalos de signo constante (0.25 puntos)

f ES POSITIVA EN $(0, +\infty)$
f ES NEGATIVA EN $(-\infty, 0)$

vi. Coordenadas de los máximos y mínimos absolutos si los hubiera (0.25 puntos)

MÍNIMO ABSOLUTO $(-1, -0'8)$
NO HAY MÁXIMOS DE NINGÚN TIPO

vii. Coordenadas de los máximos y mínimos relativos si los hubiera (0.25 puntos)

$(-1, -0'8)$ MÍNIMO RELATIVO

viii. Si tuviera asíntotas dar sus ecuaciones e indicar el tipo de asíntota. (0,25 puntos)

ASÍNTOTA HORIZONTAL $y = 0$ ó eje OX (cuando $x \to -\infty$)