Examen de Matemáticas Aplicadas a las CCSS I
25 de abril 2019

IES La Estrella Alumno:……………………………………………………………Grupo: 1º C Bach

Todas las respuestas deben estar adecuadamente justificadas y desarrolladas

Realiza **uno** de los dos problemas siguientes:(1.5 puntos)

1A.-Determinar razonadamente si la función $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

$f'(x)=\dfrac{-3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=0 \Rightarrow -6x=0 \Rightarrow x=0$

Posible extremo en $x=0$

Estudiamos el crecimiento

$x\in(-\infty,0)$ $x=-1$ $f'(-1)>0$ f crece en $(-\infty,1)$

, $x\in(0,+\infty)$ $x=1$ $f'(1)<0$ f decrece en $(1,+\infty)$

En $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ f alcanza un máximo relativo

1B.-Determinar razonadamente si la función $f(x)=x\,e^{x}$ tiene extremos relativos. En caso afirmativo clasificarlos y proporcionar sus coordenadas.

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0 \Rightarrow (1+x)e^x=0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

Posible extremo en $x=-1$

Estudiamos la monotonía

Si $x\in(-\infty,-1)$ $x=-2$ $f'(-2)=-e^{-2}<0$

f es DECRECIENTE

Si $x \in (-1, \infty)$ $x=0$ $f'(0) = 1 \cdot e^0 > 0$

f es CRECIENTE

Por tanto en $(-1, -e^{-1}) = \left(-1, \frac{-1}{e}\right)$ f alcanza MÍNIMO

2.- Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{x+1} - x\right)$ en $x = 1$. (1.5 punto)

$f(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - 1$ $f'(1) = \frac{-1}{4} - 1 = \frac{-5}{4}$

Recta tangente: $y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}(x-1)$

$y = \frac{-5}{4}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$

$\boxed{y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}$

.- Sea la función $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

a) Determinar las funciones derivadas de orden uno y dos de f. (0.5 puntos)

$f'(x) = -4x^3 + 4x$

$f''(x) = -12x^2 + 4$

j

b) Determinar los intervalos de monotonía de f. (0.75 puntos)

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$-4x^2 + 4 = 0$ $\boxed{x = \pm 1}$

(Posibles extremos $-1, 0, 1$)

Estudiamos el signo de f' en cuatro intervalos

$x \in (-\infty, -1)$ $\quad x = -2 \quad f'(-2) > 0 \quad f$ CRECIENTE

$x \in (-1, 0)$ $\quad x = -\frac{1}{2} \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 2 < 0 \quad f$ DECRECIENTE

$x \in (0, 1)$ $\quad x = \frac{1}{2} \quad f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + 2 > 0 \quad f$ CRECIENTE

$x \in (1, +\infty)$ $\quad x = 2 \quad f'(2) = -32 + 8 < 0 \quad f$ DECRECIENTE

c) Determinar los intervalos de curvatura de *f*. (0.75 puntos)

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

$-12x^2 + 4 = 0$; $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

CONVEXA $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f''(0) > 0$

$f'' < 0$	$-1/\sqrt{3}$	$f'' > 0$ (0)	$1/\sqrt{3}$	$f'' < 0$

CÓNCAVA $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

d) Dar las coordenadas y clasificar los extremos relativos de *f* (si los tuviera). (0.5 puntos)

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right\}$ MÁXIMO RELATIVO

COORDENADAS $(1, 1)$ $(-1, 1)$ $(0, 0)$

$x = 0$ MÍNIMO RELATIVO

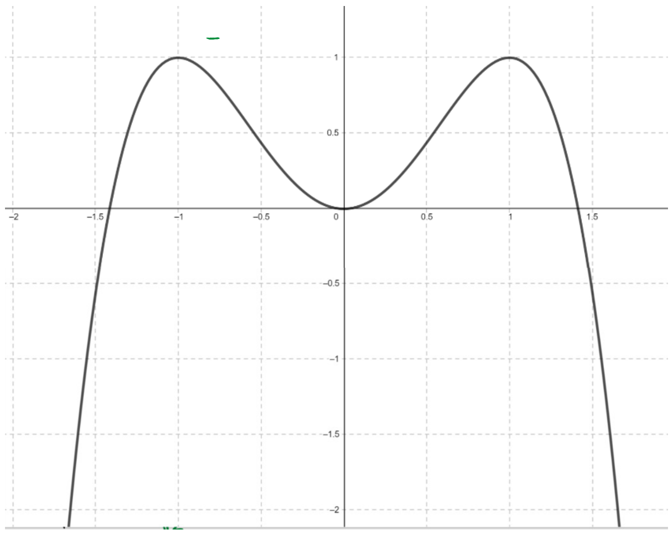
e) Dar las coordenadas de los puntos de inflexión de *f* (si los tuviera). (0.5 puntos)

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

COORDENADAS $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

$f(1/\sqrt{3}) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \qquad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{5}{9}$

f) Representar con precisión la gráfica de *f* utilizando los apartados anteriores. (1 punto)



4.- Calcula (y simplifica) las funciones derivadas de las funciones siguientes (1.5 puntos):

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{2x(1+x^2)-(x^2-1)2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x+2x^3-2x^3+2x}{(1+x^2)^2}=\boxed{\frac{4x}{(1+x^2)^2}}$$

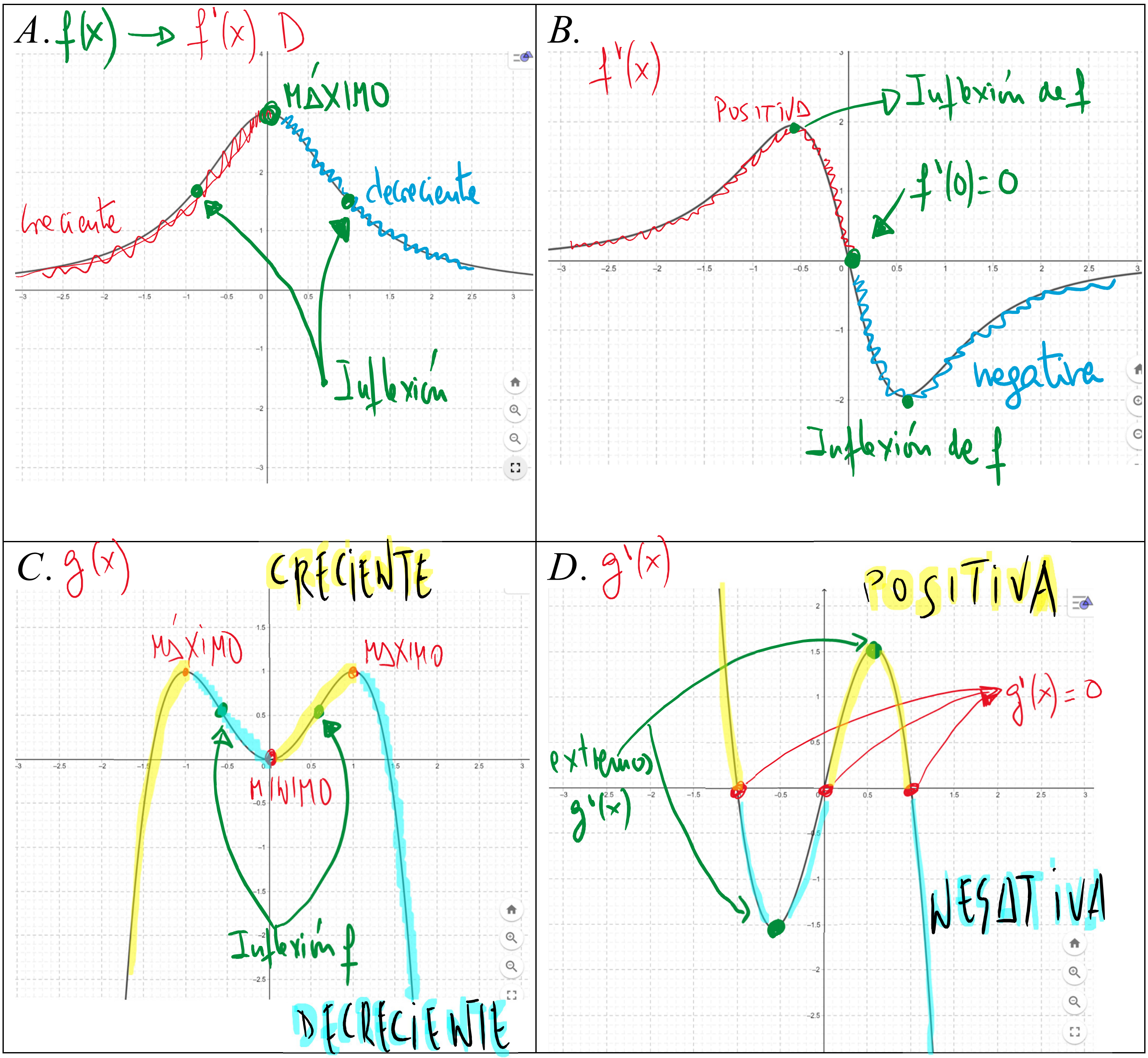
b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+2x}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cancel{2}x+\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x}}\right)=\frac{1+x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x}}=\frac{1+x}{\sqrt{2x^2+4x}}$$

$f(x)=x^2e^{x^3}$

$$f'(x)=2xe^{x^3}+x^2\cdot 3x^2\cdot e^{x^3}=2xe^{x^3}+3x^4e^{x^3}=(2x+3x^4)e^{x^3}$$

4.- A continuación tienes las gráficas de cuatro funciones con dominio todo R. Dos de ellas corresponden a las funciones derivadas de las otras dos funciones. Tienes que asignarlas proporcionando **2 razones** por las que has realizado tu elección. (1.5 puntos)



<u>Instrucciones</u>: Los razonamientos deben estar bien explicados matemáticamente y deben exponerse de la forma expuesta a continuación (como ejemplo, claro): (no completar aquí la respuesta)

- La gráfica de *A* es la gráfica de la función derivada de C porque…:
  Razón 1., Razón 2.