# TEMA 4. MODELOS DE PROBABILIDAD DISCRETOS

## ❖ 4.1 Distribución binomial

### ◈ 4.1.1 Definición. Ejemplos

➢ Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A, que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, $\overline{\mathbf{A}}$.

➢ Se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A, y por lo tanto la de su complementario:

$$P(A)=p\,;\quad P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$$

➢ Se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria Binomial :

➢ X: "nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) en n realizaciones independientes del experimento"

✓ Por lo tanto, $X$: 0, 1, 2 , 3, ……$n$

$$X \rightarrow B(n; p)$$

## ❖ Función de probabilidad

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r q^{n-r}$$

$$r: 0,1,2,\ldots,n$$

- Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=0}^{n} P(X=r)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=1$$

## ♦ Ejemplos

- Nº de caras al lanzar 20 veces una moneda
- Nº de aprobados si se presentan 80 alumnos a un examen
- Nº de familias con un solo hijo en una población de 120 familias
- Nº de reacciones negativas ante un fármaco administrado a 40 pacientes
- Nº de accidentes de tráfico si han circulado 1200 automóviles
- Nº de semillas que germinan de las 20 semillas que se han plantado en suelos de idéntica composición

## ◈ 4.1.2 La media y la varianza

### ❖ Media

$$\mu = E[X] = \sum_{r=0}^{n} rP(X = r) = np$$

### ❖ Varianza

$$Var[X] = \sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} (r - \mu)^2 P(X = r) = npq$$

### ♦ Ejemplo

Diez individuos, cada uno de ellos propenso a la tuberculosis, entran en contacto con un portador de la enfermedad. La probabilidad de que la enfermedad se contagie del portador a un sujeto cualquiera es de 0.1. ¿Cuántos se espera que contraigan la enfermedad?

Solución:

$$X \to B\,(10; 0.1) \;\Rightarrow\; E(X) = 10 \times 0.1 = 1$$

## ◈ 4.1.3 Uso de tablas

### ♦ Ejemplo

La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0.15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

a. En dos aves
b. En ningún ave
c. En menos de 4 aves
d. En más de 3 aves
e. Entre 2 y 5 aves

Solución:

$\textit{Suceso } A \ : \ \text{"}\textit{A un ave se le presenta reacción negativa}\text{"}$

$X : \text{"}\textit{nº de aves a las que se les presenta tal reacción}\text{"}$

$P(A) = 0.15 \ ; \quad n = 10 \ ; \quad X \ \rightarrow \ B(10 \ ; \ 0.15)$

$a. \quad P(X = 2) = 0.2759$

$b. \quad P(X = 0) = 0.1969$

$$c.\quad P(X<4)=P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)=0.1969+0.3474+$$
$$+0.2759+0.1298=0.95$$

$$d.\quad P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)\big)=1-\big(0.1969+0.3474+0.2759+$$
$$+0.1298\big)=0.05$$

$$e.\quad P(2\le X\le 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+$$
$$+P(X=5)=0.2759+0.1298+0.0401+0.0085=$$
$$=0.4543$$

✧ Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo (Azul) y uno dominante (Marrón) para el color de los ojos, son padres de tres hijos. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para X, número de hijos con ojos azules?

**E = {(AA), (AM), (MA), (MM)}**

**A = "Ojos Azules"; P ( A ) = p =1/4; n = 3**

**X = {Nº de hijos con ojos azules de 3 hijos}**

$$X \to B(n; p) = B(3;\, 0.25)$$

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} \;;\; r = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4219$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.4219$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0.1406$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0156$$