Examen de Matemáticas I
18 de febrero 2018

IES La Estrella Alumno:……………………………………………………………Grupo: 1º B Bach

Todos los problemas deben desarrollarse adecuadamente. No se aceptan respuestas sin procesos. No se puede utilizar calculadora.

1.- Escribe en forma polar el complejo $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$ (1.25 puntos)

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{2}\right)^4 = \left(\frac{-2i}{2}\right)^4 = (-i)^4 = 1 = 1_{0^\circ}$$

2.- El producto de dos complejos es $2\sqrt{2}_{75^\circ}$. Sabiendo que uno de los números es $z = 1 + i$, halla el otro número. (1.25 puntos)

Sea w el complejo buscado. $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$

$W \cdot z = 2\sqrt{2}_{75^\circ}$;

$W \cdot \sqrt{2}_{45^\circ} = 2\sqrt{2}_{75^\circ}$; $W = \frac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}} = 2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$= \boxed{\sqrt{3}+i}$

3.- Halla un número complejo z, sabiendo que una de sus raices quintas es 2 – 2i. (1 punto)

$\sqrt[5]{z} = 2-2i \Rightarrow z = (2-2i)^5 = \left(2\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^5 =$

$= 32 \cdot \sqrt{2}^5_{1575^\circ} = 128\sqrt{2}_{135^\circ} =$

$$\begin{array}{r|l} 1575 & 360 \\ \hline 135 & 4 \end{array}$$

$= 128\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -128+128i$

4.- Resuelve la ecuación siguiente: $z^2 - 4i\,z - 5 = 0$ (2 puntos)

$$z = \frac{4i \pm \sqrt{(4i)^2+20}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{4}}{2} = 2i \pm 1 = \begin{cases} 1+2i \\ -1+2i \end{cases}$$

5.- Realiza la siguiente operación. Proporciona la solución en forma binómica. (1 punto)

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}}\right)^{1/4} = \frac{2}{\sqrt{2}}_{-255^\circ} = \left(\sqrt{2}_{105^\circ}\right)^{1/4} = (*)$$

$$60-315^\circ = -255^\circ = 360-255 = 105^\circ$$

$$(*) : z_1 = \sqrt[8]{2}_{\frac{105^\circ}{8}} \qquad z_3 = \sqrt[8]{2}_{13'1^\circ+180^\circ}$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}_{13'1^\circ+90^\circ} \qquad z_4 = \sqrt[8]{2}_{13'1^\circ+270^\circ}$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos 13'1^\circ + i \operatorname{sen} 13'1^\circ\right) = \sqrt[8]{2}\left(0'9739 + 0'2266 i\right)$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos 102'1^\circ + i \operatorname{sen} 102'1^\circ\right) = \sqrt[8]{2}\left(-0'2096 + 0'9777 i\right)$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos 192'1^\circ + i \operatorname{sen} 192'1^\circ\right) = \sqrt[8]{2}\left(-0'9777 - 0'2096 i\right)$$

$$z_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos 282'1^\circ + i \operatorname{sen} 282'1^\circ\right) = \sqrt[8]{2}\left(0'2096 - 0'9777 i\right)$$

6.- Calcula $\frac{(4-2i)i^5}{1+i} + \frac{i^{30}(5-i)}{-1+i} =$ (1.5 puntos)

$$\frac{(4-2i)i(1-i)}{(1+i)(1-i)} + \frac{i^2(5-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{(2-6i)i}{2} - \frac{-6-4i}{2} =$$

$$= \frac{2i+6+6+4i}{2} = \boxed{6+3i}$$

7.- Utilizando sólo números complejos, halla el perímetro de un pentágono regular que tiene un vértice en el punto A(-1, 0).
Calcula también su área (utiliza cualquier método convenientemente razonado) (2 puntos)

Los ángulos internos de un pentágono regular miden $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Por tanto si $z = -1$ es un vértice, el siguiente se obtiene: $z_2 = z_1 \cdot 1_{72^\circ} = -1_{72^\circ} =$

$$= -(\cos 72^\circ + i \,\text{sen}\, 72^\circ) = -(0'309 + 0'951 i) =$$

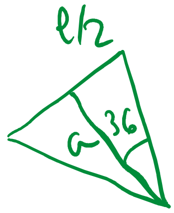
$$= \underline{-0'309 - 0'951 i}$$

LADO: $|z_1 - z_2| = |(-0'309 - 0'951 i) - (-1)| = |0'691 - 0'951 i| =$

$$= \sqrt{0'691^2 + 0'951^2} = \boxed{1'175}$$

Perímetro: $5 \cdot 1'175 = 5'875$

Apotema: $\text{tg}\, 36^\circ = \frac{1'175/2}{a}$



$$a = \frac{1'175/2}{\text{Tg}\, 36^\circ} = \frac{0'5875}{0'7265} = \boxed{0'8}$$

$$A = \frac{5'875 \cdot 0'8}{2} = \boxed{2'35 \text{ cm}^2}$$