Matemáticas I 15.2.19

Ejercicios de complejos

IES La Estrella Alumno: SOLUCIÓN (revisad las operaciones!!)

1.

Efectuar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

$$i^{-1};\quad \frac{\sqrt{2}+i}{2i};\quad \frac{2-i}{1+i}+i;\quad \frac{5}{(1-i)(2-i)(i-3)};\quad i^{344}+(-i)^{231};\quad \frac{(1+i)^5+1}{(1-i)^5-1};$$

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$$

$$\frac{\sqrt{2}+i}{2i}=\frac{(\sqrt{2}+i)(-2i)}{4}=\frac{-2\sqrt{2}\,i+2}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\frac{2-i}{1+i}+i=\frac{(2-i)(1-i)}{1+1}+i=\frac{1-3i}{2}+i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\frac{5}{(1-i)(2-i)(-3+i)}=\frac{5}{(1-i)(-3+i)}=\frac{5}{-2-2i}=\frac{5(-2+2i)}{8}=$$

$$=\frac{-10}{8}+\frac{10}{8}i=-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}i$$

$$i^{344}+(-i)^{231}=i^0-i^3=1-(-i)=1+i$$

$$\frac{(1+i)^5+1}{(1-i)^5-1}=\frac{(\sqrt{2}_{45^\circ})^5+1}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5-1}=\frac{4\sqrt{2}_{225^\circ}+1}{4\sqrt{2}_{1575^\circ}-1}=\frac{4\sqrt{2}_{225^\circ}+1}{4\sqrt{2}_{135^\circ}-1}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+1}{4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-1}=\frac{-3-4i}{-5+4i}=\frac{(-3-4i)(-5-4i)}{25+16}=$$

$$=\frac{(15-16)+i(-12+20)}{41}=\frac{-1}{41}+\frac{8}{41}i$$

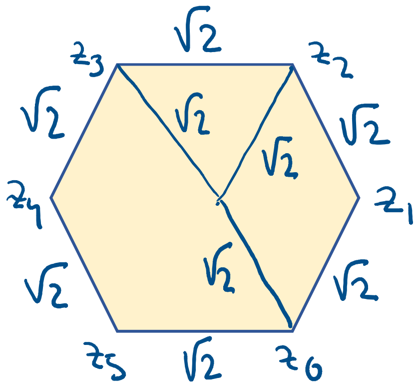
2.

Hallar todos los valores complejos de:

a) $i^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{6}}$ e) $\left[4\cos(\frac{2\pi}{3}) + 4i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3})\right]^{-\frac{3}{4}}$

$$i^{1/2} = \sqrt{i} = \begin{cases} 1_{45^\circ} \\ 1_{225^\circ} \end{cases}$$

$$8^{1/6} = \sqrt[6]{8} = \begin{cases} \sqrt{2}_{0^\circ} \\ \sqrt{2}_{60^\circ} \\ \sqrt{2}_{120^\circ} \\ \sqrt{2}_{180^\circ} \\ \sqrt{2}_{240^\circ} \\ \sqrt{2}_{300^\circ} \end{cases}$$



$$\left(4\cos\frac{2\pi}{3} + 4i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^{-3/4} = \left(4_{\frac{2\pi}{3}}\right)^{-3/4} = 4^{-3/4}_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{64}_{\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} =$$

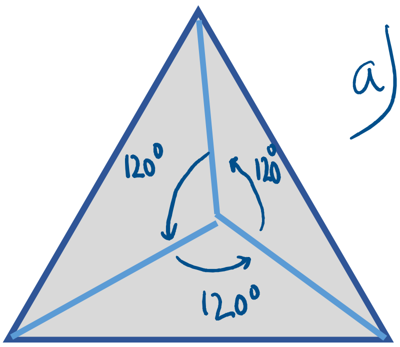
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{64}_{(315^\circ)}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[4]{64}}_{=(2^6)^{1/4}}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2^{1/2}}{2^{3/2}\cdot 2} - \frac{2^{1/2}}{2^{3/2}\cdot 2}i = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$\to 2^{1/2-3/2-1} = 2^{-2}$

3.

Si se sabe que $1+\mathrm{i}$ es una raíz cúbica de z, hallar z y las demás raíces.

Puesto que las raíces cúbicas de cualquier complejo forman un triángulo equilátero, basta con girar 120° cada vértice para obtener dicho triángulo.



a) $(1+i)\cdot 1_{120^\circ} = \sqrt{2}_{45^\circ}\cdot 1_{120^\circ} =$

$= \sqrt{2}_{165^\circ} = \sqrt{2}\cos 165^\circ + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,165^\circ i$

$= \sqrt{2}\cdot(-0'9659 + 0'2588 i) =$

$= -1'365 + 0'3659 i$

b) $\sqrt{2}_{45^\circ}\cdot 1_{240^\circ} = \sqrt{2}\cos 285^\circ + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,285^\circ i =$

$= \sqrt{2}\left(0'2588 - 0'9659 i\right) = 0'3659 - 1'365 i$

Obviamente $z = (1+i)^3 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -2+2i$

4.

Resolver las ecuaciones:

a) $z^4 + 2 = 0$ b) $z^2 + 2z - \mathrm{i} = 0$

e) $z^6 = \mathrm{i}z$

$z^4+2=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2_{180^0}}=$ (acabar)

$z^2+2z-i=0;$ (LAS RAICES DE $\sqrt{4+4i}$ SON 2 Y OPUESTAS)

$z=\frac{-2+\sqrt{4+4i}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{1+i}}{2}=-1+\sqrt{1+i}=$

$-1+\sqrt{1+i}=-1+\sqrt{\sqrt{2}_{45^0}}=\begin{cases}-1+\sqrt[4]{2}\left(\cos 22'5^0+i\operatorname{sen} 22'5^0\right)\\-1+\sqrt[4]{2}\left(\cos 202'5^0+i\operatorname{sen} 202'5^0\right)\end{cases}$ ACABAR CON CALC

$z^6=iz;\ z^6-iz=0;\ z\left(z^5-i\right)=0 \Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ES CUERPO COMO TR

$\boxed{z=0}$ $z^5-i=0 \Rightarrow z=\sqrt[5]{i}$ (TERMINAR)

5. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

$$z_1 = 3+2i \qquad z_2 = -1+i \qquad z_3 = 8-2i$$

6/7/8 dejan al lector

6. Con los complejos anteriores calcula

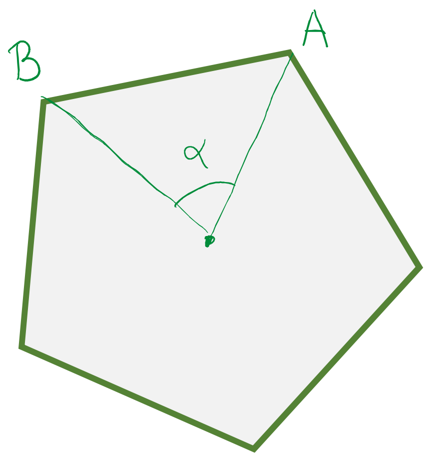
$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3^2 \quad \text{y} \quad \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$$

7. Calcula las potencias siguientes. Proporciona el resultado en forma binímica.

$$(1-i)^{14}, \left(2-2\sqrt{2}i\right)^6$$

NUEVA VERSIÓN (está como el 3)

8.- El punto A tiene de coordenadas (5, 12) y es vértice de un PENTÁGONO REGULAR inscrito en una circunferencia. Utilizando números complejos calcula EL perimetro del pentágono.



$\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ$

$z_1 = A = 5+12i$

$z_2 = B = z_1 \cdot 1_{72^\circ} = z_1 \cdot (\cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ) =$

$= (5+12i)\cdot(0'309 + 0'951i) =$

$= -9'867 + 8'463i$

LADO DEL PENTÁGONO: $|z_1 - z_2| = |-14'867 + 20'463i| =$

$= \sqrt{221'02 + 418'73} = 25'29$

POR TANTO: PERÍMETRO DEL PENTÁGONO: $\underline{12'645}$ u.