El número e

El número que se designa con la letra **e** es un número irracional cuyas primera cifras son:

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

aunque suele aproximarse por 2,7182 o 2,718.

Leonard Euler (1707 - 1783)

El número **e** fue bautizado así por Leonard Euler a mediados del siglo XVIII. Aunque se afirma que escogió dicha letra por ser la inicial de su apellido no hay ninguna razón para pensarlo. Tampoco Euler –cuya obra escrita se terminó de catalogar hace sólo unos años- no hizo mención en tal sentido. Es más plausible pensar que la letra **e** es la siguiente vocal a la letra **a**, que ya estaba siendo utilizada por Euler con otro propósito en su libro. También se especula con que la razón es por la inicial de "exponencial" lo que es pueril dado que lo *exponencial* era un concepto asentado en las matemáticas.

Además e es un número trascendente. Al igual que le sucede al π no es la raíz de ningún **polinomio** con coeficientes **racionales**. Es decir que no existe ninguna ecuación del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x \ + a_0 = 0$$

con a_i racionales (fracciones, enteros, naturales) que tenga por solución al número e.

Por ejemplo esto nos dice que las siguientes expresiones son falsas ¿Por qué?:

$-3e^3 + 2e^2 + 1 = 0 \quad 2e^5 - \frac{2}{3}e \ = -3$ o en general $a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_1 e \ + a_0 = 0$ con a_i racional.

DEFINICIONES DEL NÚMERO E

Su valor se calcula de distintas formas:

1

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta expresión de 1638 se debe a Jakob Bernoulli. Aparece como resultado de su estudio del interés bancario compuesto y se acepta como la primera definición de **e** aunque todavía no había sido bautizado. Jakob no pudo decir mucho más que era un número entre 2 y 3. Era la primera vez que se definía un número como un límite.

La expresión admite varias generalizaciones:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Y en general

$$e = \lim_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \quad siempe\ que \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

2 $$e \quad = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, donde\ k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1) \cdot k = k \cdot (k-1)!$$

Esta asombrosa expresión fue publicada por primera vez en 1748 por Euler que la incluyó en uno de sus libros más transcendentales, *Introductio in Analysin infinitorum*. Euler fue amigo y compañero de clase de Daniel Bernoulli, sobrino de Jakob Bernoulli e hijo de Johann Bernoulli todos ellos extraordinarios e influyentes matemáticos del siglo XVII y XVIII.

Se dice que la expresión anterior define al número **e** como una **serie numérica** y se escribe abreviadamente: $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Las expresiones anteriores se pueden generalizar para proporcionar el modo de cálculo de los valores de la función exponencial:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

que recibe el nombre de **desarrollo en serie de potencias** de la función exponencial.

La calculadora básicamente calcula con esa fórmula cuando pulsas el botón $\mathbf{e}^x$ tiene que hacer potencias y divisiones.

Asimismo en *Introductio* Euler proporciona el valor de **e** con 18 cifras decimales y descubre un sinfín de sus maravillosas propiedades que convierten a este número en una pieza capital de las finanzas, la física o la ingeniería. Euler es de hecho el auténtico padre del número e, ya que demostró que la fórmula que estudió Bernoulli tiene por límite a 2,718…. Y le puso nombre reconociendo el valor de dicho número, como así ha sido.

3 $$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ldots}}}}}$$

4 $$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

Euler también incluyó en el *Introductio* estas fórmulas que definen a **e** como **fracciones continuas** infinitas con las que demostró que e es irracional.

5

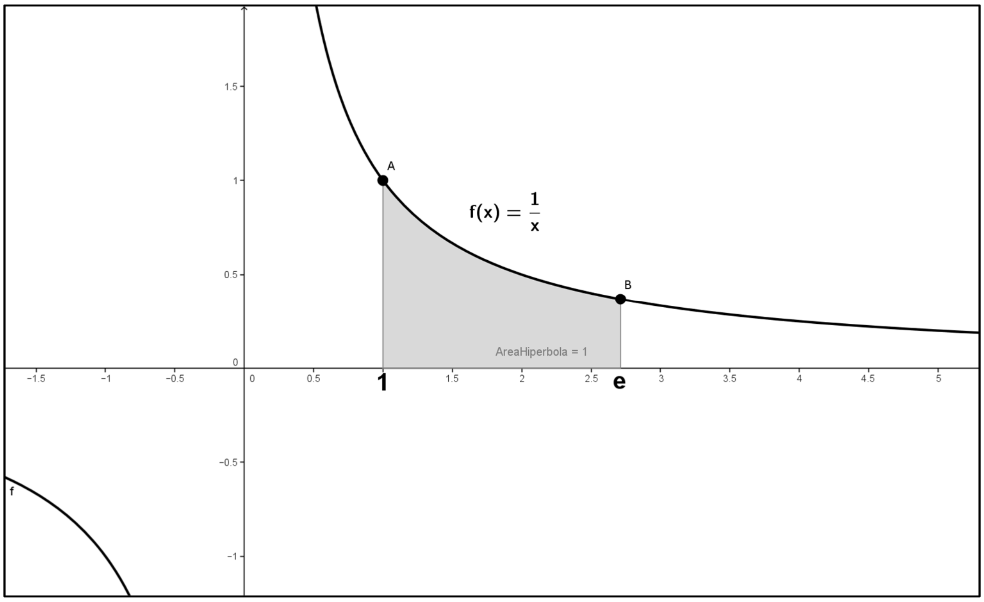

Ilustración 1

Esta definición asigna el valor de e al área de una región plana. Observa la imagen anterior: la función representada en la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$. La región que está sombreada tiene un área que mide exactamente 1 unidad de superficie. La región está limitada por 1 y el número e.

Esto se escribe como sigue[1]:

$$1 = \int_{1}^{e} \frac{1}{x} dx$$

Esta idea surgió ya en el siglo XVII (os lo dejo en inglés para que practiquéis):

The next possible occurrence of *e* is again dubious. In 1647 Saint-Vincent computed the area under a rectangular hyperbola $f(x) = \frac{1}{x}$. Whether he recognised the connection with logarithms is open to debate, and even if he did there was little reason for him to come across the number *e* explicitly. Certainly by 1661 Huygens understood the relation between the rectangular hyperbola and the logarithm. He examined explicitly the relation between the area under the rectangular hyperbola $y = 1/x$ and the logarithm. Of course, the number *e* is such that the area under the rectangular hyperbola from 1 to *e* is equal to 1. This is the property that makes *e* **the base of natural logarithms**, but this was not understood by mathematicians at this time, although they were slowly approaching such an understanding.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = e^x$

Del mismo modo que calculamos una tabla de valores para representar $f(x) = 2^x$ podemos con ayuda de la calculadora completar la tabla:

x	$f(x) = e^x$
1	2,718
2	7,389
…	…

Si representamos los puntos, obtendremos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$

[1] Es sólo una curiosidad. En Bachillerato estudiarás cálculo integral.

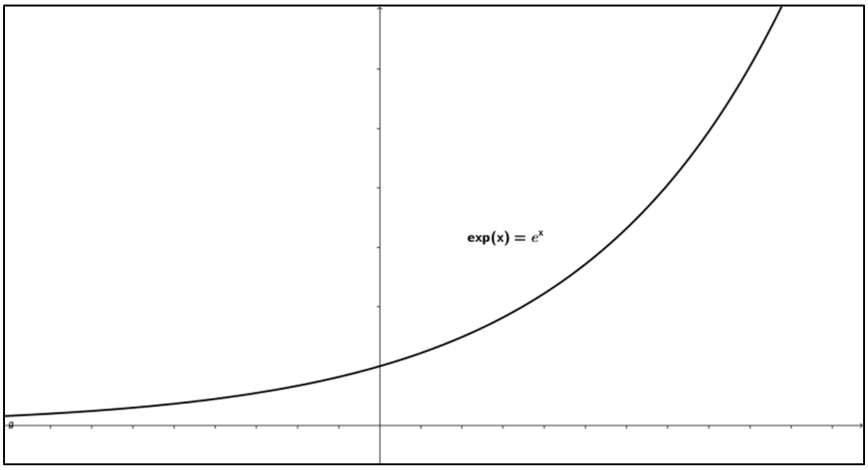

Ilustración 2

Pues bien, si calculáramos el área de la región sombreada (se dice "*el área bajo la gráfica*") que se extiende desde -∞ hasta 1, obtienes el valor e.

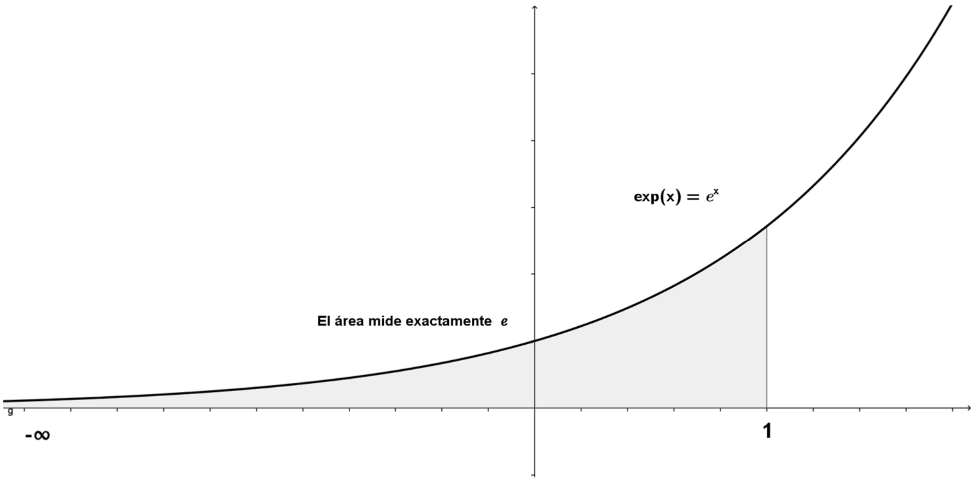

Ilustración 3

Aunque la propiedad de esta curva es aún más asombrosa ya que si calculas el área de la región que queda bajo la curva desde -∞ hasta, por ejemplo 5, obtienes el valor e^5. Si calculas el área de la región que queda bajo la curva desde -∞ hasta 20 obtienes el valor e^{20} y así sucesivamente. Sólo la función e^x tiene esta propiedad. (Y muchas más propiedades exclusivas).

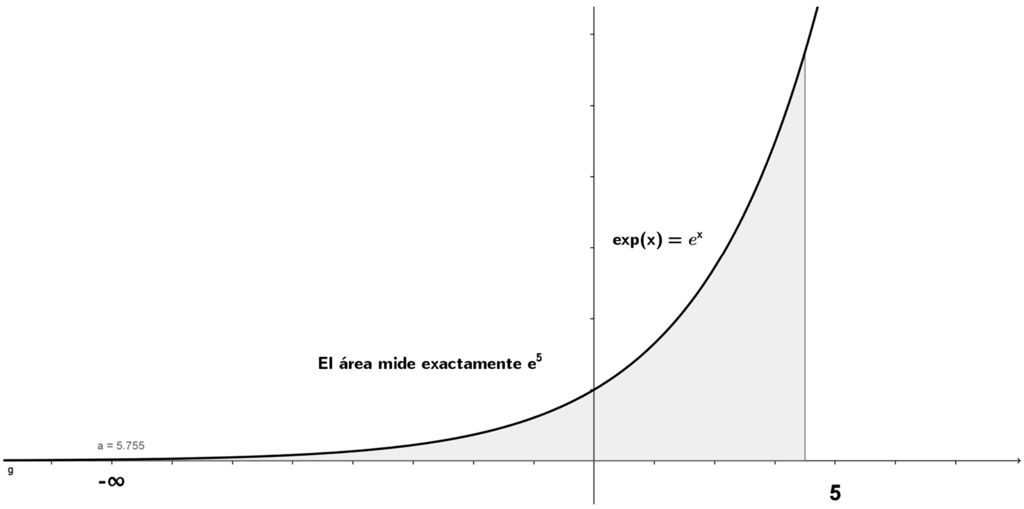

Ilustración 4

Todas las funciones exponenciales son parecidas. Se escriben como $f(x) = b^x$ donde **b** es a la **base** de la función exponencial. Antes hemos visto la gráfica de la función exponencial de base **e**, mas abreviadamente "*e elevado a x*" .Las propiedades comunes a todas (las que tienen base mayor que 1, b > 1) son:

- Dominio: $\mathbb{R}$ =(-∞, ∞)
- Asíntota vertical: no tiene porque el dominio es $\mathbb{R}$.
- Tiene una asíntota horizontal en el EJE OX PERO SOLO EN **-∞**.
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \quad = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) \quad = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- La gráfica NO corta el eje OX.
- La gráfica exponencial corta al eje OY en el punto (0,1).
- Es una función creciente en (-∞, +∞)
- Cuanto mayor es la base de la exponencial el crecimiento de la función es más rápido.
- Cuanto mayor es la base de la exponencial el decrecimiento hacia o cuando x⟶(-∞) es más veloz.

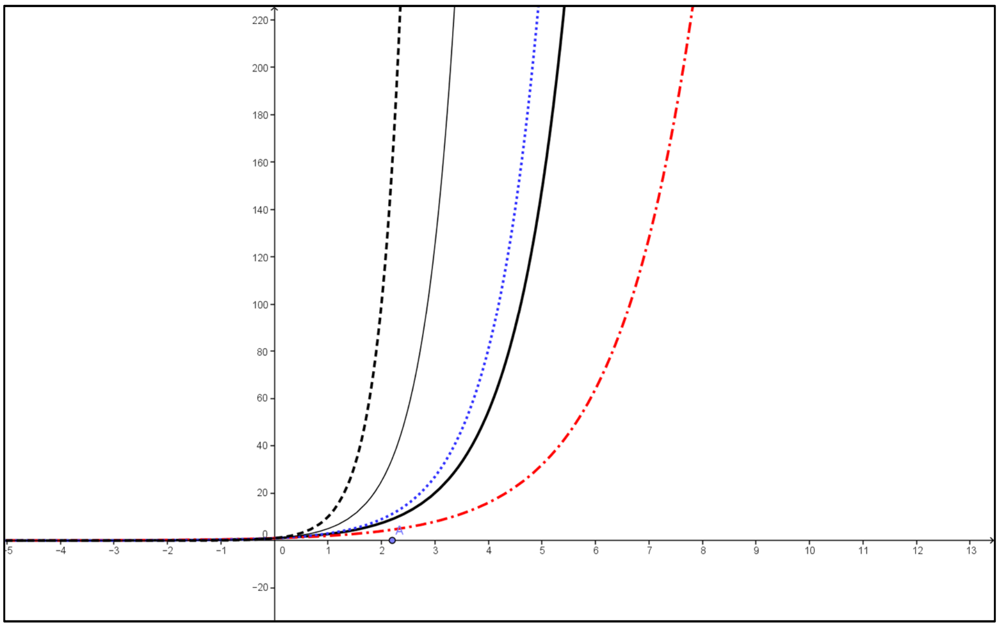

Ilustración 5

Si aumentamos el zoom para espiar lo que sucede cerca de del punto (0,1) nos encontraremos con:

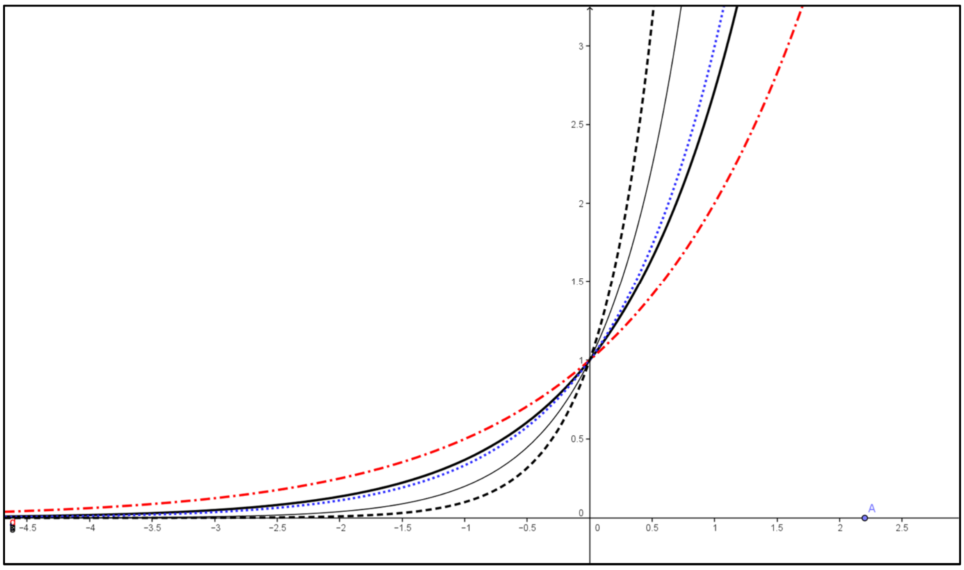

Ilustración 6

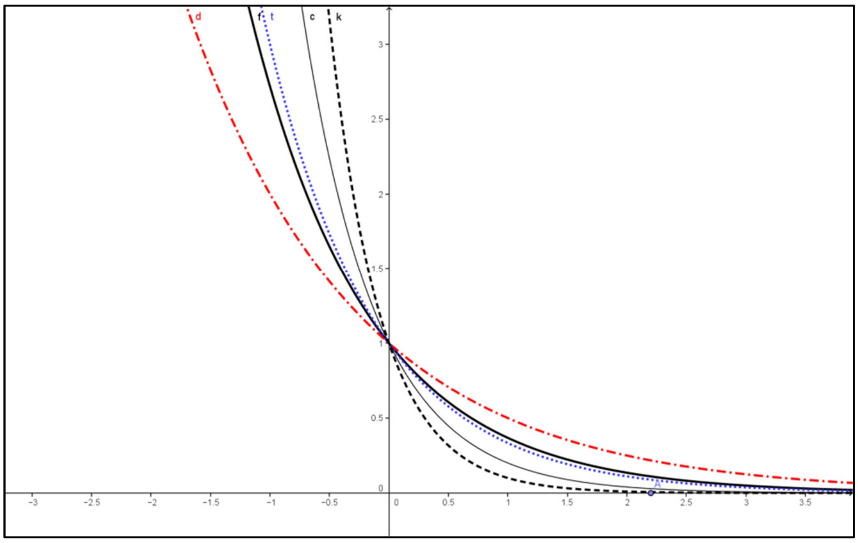

Ilustración 7 *¿QUÉ FUNCIONES SERÁN ESTAS?*

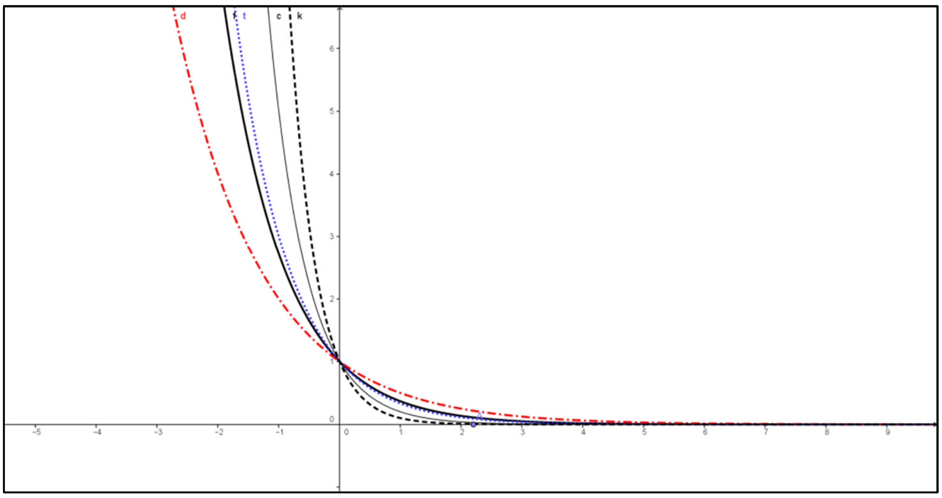

Ilustración 8

1. Con ayuda de la calculadora calcula el valor de e tomando la fórmula de 1, para n = 4, n = 10 y n = 100.

2. Utilizando la fórmula 2, calcula 6 términos de la suma que proporciona el valor de e y halla el valor obtenido.

3. Utilizando la serie de potencias de 2, halla utilizando 5 términos el valor de los siguientes números. Compara el valor que obtienes con el que te da la calculadora: e^2, e^{-1}, e^5, e^{-5}, e^{10}.

4. Utilizando la fórmula

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

   y la calculadora, aproxima el valor de **e** calculando los términos para *x* igual a 10, 30, 80, 100, 1000.

   ¿Se parecen a los valores que da la calculadora para **e**?

5. Utiliza la calculadora para completar una tabla de valores que permita representar la función $f(x) = e^x$

6. Utiliza la calculadora para completar una tabla de valores que permita representar la función $f(x) = e^{-x}$ ¿Encuentras algún parecido entre las dos gráficas anteriores?

7. Haz los problemas 5 y 6 con las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ ¿Les pasa lo mismo que a las funciones de los problemas 5 y 6?

8. Calcula los siguientes límites usando lo señalado en el epígrafe 1 del texto:

   a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7+x^6}\right)^{7+x^6}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x^5}\right)^{6x^5}$

9. Asocia cada gráfica de la Ilustración 5 con las funciones siguientes:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = 10^x \quad h(x) = 5^x \quad m(x) = e^x \quad s(x) = 1.5^x$$

10. Describe lo que sucede cuando la base aumenta (siempre con base ≥ 1)

11. Ahora observa las gráficas anteriores en la Ilustración 6 observando lo que sucede cuando *x* es negativa ¿Cambia el comportamiento entre ellas?

12. Explica lo que significa la frase "*Cuanto mayor es la base de la exponencial el crecimiento de la función es más rápido*" mencionada sobre las funciones exponenciales.

13. Vuelve a la definición de Euler del número e como fracción continua. Observa los números que van apareciendo en los denominadores. ¿Siguen algún patrón? ¿Sabrías continuar con más fracciones?

9. Con ayuda de la calculadora calcula el valor de e tomando la fórmula de 1, para n = 4, n = 10 y n = 100.

$$n = 4 \quad e \sim \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^{4} =$$

$$n = 10 \quad e \sim \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} =$$

$$n = 100 \quad e \sim \left(1 + \tfrac{1}{100}\right)^{100} =$$

10. Utilizando la fórmula 2, calcula 6 términos de la suma que proporciona el valor de e y halla el valor obtenido.

11. Utilizando la serie de potencias de 2, halla utilizando 5 términos el valor de los siguientes números. Compara el valor que obtienes con el que te da la calculadora: e^{2}, e^{-1}, e^{5}, e^{-5}, e^{10}.

12. Utilizando la fórmula

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

y la calculadora, aproxima el valor de **e** calculando los términos para *x* igual a 10, 30, 80, 100, 1000.

¿Se parecen a los valores que da la calculadora para **e**?

13. Utiliza la calculadora para completar una tabla de valores que permita representar la función $f(x) = e^{x}$

14. Utiliza la calculadora para completar una tabla de valores que permita representar la función $f(x) = e^{-x}$ ¿Encuentras algún parecido entre las dos gráficas anteriores?

15. Haz los problemas 5 y 6 con las funciones $f(x) = 2^{x}$ y $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^{x}}$ ¿Les pasa lo mismo que a las funciones de los problemas 5 y 6?

16. Calcula los siguientes límites usando lo señalado en el epígrafe 1 del texto:

b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^{2}}\right)^{x^{2}}$ b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7+x^{6}}\right)^{7+x^{6}}$ c) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3x^{5}}\right)^{6x^{5}}$

14. Asocia cada gráfica de la Ilustración 5 con las funciones siguientes:

$$f(x) = 2^{x} \quad g(x) = 10^{x} \quad h(x) = 5^{x} \quad m(x) = e^{x} \quad s(x) = 1.5^{x}$$

15. Describe lo que sucede cuando la base aumenta (siempre con base $\geq$ 1)

16. Ahora observa las gráficas anteriores en la Ilustración 6 observando lo que sucede cuando *x* es negativa ¿Cambia el comportamiento entre ellas?

17. Explica lo que significa la frase "*Cuanto mayor es la base de la exponencial el crecimiento de la función es más rápido*" mencionada sobre las funciones exponenciales.

18. Vuelve a la definición de Euler del número e como fracción continua. Observa los números que van apareciendo en los denominadores. ¿Siguen algún patrón? ¿Sabrías continuar con más fracciones?