IES La Estrella

Examen de Matemáticas I
26 de octubre . Grupo: 1º B Bach

1.- (*1 punto*) Calcula el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Escribe la solución como intervalo o como operaciones entre intervalos según convenga.

(a) $|x|+2\leq 5$ (b) $|3x+9|>4$

$|x|\leq 3$

$[-3,3]$

$3|x+3|>4$

$|x-(-3)|>\frac{4}{3}$

$\left(-\infty,-3-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-3+\frac{4}{3},+\infty\right)=$

$\left(-\infty,\frac{-13}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$

2.- (1 punto) Calcula y simplifica el resultado. Proporciona el resultado como radical:

$$c^2d\sqrt{\frac{2dc^3}{49c^2}}-\frac{3cd\sqrt{32c^3d}}{4}=\frac{c^2d\cancel{c}\sqrt{2dc}}{7\cancel{c}}-\frac{3cd\cdot\cancel{4}c\sqrt{2cd}}{\cancel{4}}=$$

$$=\frac{c^2d\sqrt{2dc}}{7}-3c^2d\sqrt{2cd}=\frac{1-21}{7}c^2d\sqrt{2cd}=\frac{-20c^2d\sqrt{2cd}}{7}$$

ESCOGE Y REALIZA SÓLO UNO DE LOS DOS APARTADOS SIGUIENTES (3a o 3b)
(1 punto) Calcula y simplifica al máximo el resultado que has de proporcionar como **radical**.

3a.- $\sqrt{\frac{1}{xy}\left(\frac{x+2y}{y}+\frac{y}{x}\right)}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{xy}\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{(xy)^2}}=\frac{x+y}{xy}$$

3b.- $\left(\sqrt{5}\right)^{-2}\frac{\left(\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}=$

$$=\frac{(5^{1/2})^{-2}\left(5\cdot5^{2/3}\right)^{2/3}}{(5^{1/2})^{1/3}}=\frac{5^{-1}\cdot5^{2/3}\cdot5^{4/9}}{5^{1/6}}=$$

$$=5^{-1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}}=5^{\left(\frac{18+12+8-3}{18}\right)}=5^{\frac{35}{18}}=$$

$$=\sqrt[18]{5^{35}}=5\sqrt[18]{5^{17}}$$

4.- (1 punto) Sin utilizar la calculadora, calcula la siguiente operación con radicales. Proporciona el resultado simplificado y racionaliza si fuera necesario.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}= \frac{3-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{(3-2\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)}{6-4}-\frac{\sqrt{6}}{6}=$$

$$=\frac{3\sqrt{6}+6-12-4\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{-6-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{-18-3\sqrt{6}-\sqrt{6}}{6}=$$

$$=\frac{-18-4\sqrt{6}}{6}=-3-\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

5.- (0.5 puntos) Calcula sin utilizar la calculadora:

$$log\sqrt{5}-10\ln(e^3)-\log(0.000001)-log\sqrt{500}=$$

$$=\frac{1}{2}\log 5-30\ln e-\log 10^{-6}-\frac{1}{2}\log 500=$$

$$=\frac{1}{2}\log 5-30+6-\frac{1}{2}(\log 5+\log 100)=\cancel{\frac{1}{2}\log 5}-24-\cancel{\frac{1}{2}\log 5}-1=\boxed{-25}$$

6.- (1.5 puntos) Si $\log C=1$ y que $\log 2=0.3$, calcular:

(a) $\log_2\sqrt{\frac{2}{C}}=\frac{1}{2}\left(\log_2 2-\log_2 C\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\log C}{\log 2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{0'3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-0'7}{0'3}\right)=\frac{-0'7}{0'6}=\boxed{-0'116}$

(b) $\log\frac{200}{0.25\sqrt{C}}=\log 2+\log 100-\log 0'25-\frac{1}{2}\log C=0'3+2-\log\frac{1}{4}-\frac{0'3}{2}=2'3+2\log 2-0'15=$

$=2'3+0'6-0'15=\boxed{2'75}$

NO UTILICES ESTA PÁGINA PARA RESPONDER A LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

7.- (1.5 puntos) Resuelve el siguiente sistemas de ecuaciones y comprueba las soluciones:

$$\begin{cases}\log(x^2+y)-\log(x-2y)=1\\ 5^{x+1}=25^{y+1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\left(\frac{x^2+y}{x-2y}\right)=\log 10\\ 5^{x+1}=5^{2(y+1)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2+y}{x-2y}=10\\ x+1=2y+2\end{cases}\begin{cases}x^2-10x+21y=0\\ y=\frac{x-1}{2}\end{cases}$$

$$x^2-10x+21\left(\frac{x-1}{2}\right)=0;\quad x^2-10x+\frac{21x-21}{2}=0;\quad 2x^2+x-21=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{4}=\frac{-1\pm 13}{4}=\begin{cases}3\\ -\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{x=3\quad y=1}$$

$$\boxed{x=-\frac{7}{2}\quad y=\frac{-7/2-1}{2}=\frac{-9}{4}}$$

Comprobamos la primera ecuación

$\log(9+1)-\log(3-2)=\log 10-\log 1=1$ ✓

$\log\left(\frac{49}{4}-\frac{9}{4}\right)-\log\left(-\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\right)=\log 10-\log 1=1$ ✓

Ambas soluciones son válidas

8.- (1.5 puntos) Resuelve la siguiente ecuación irracional y comprueba las soluciones.

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}-1=\sqrt{x^2-1}$$

$2-\sqrt{x^2-1}=x^2-1$; $-\sqrt{x^2-1}=x^2-3$; $x^2-1=x^4-6x^2+9$; $x^4-7x^2+10=0$

$x^2=t$; $t^2-7t+10=0$; $t=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} t_1=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \\ t_2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

Comprobación

$x=\pm\sqrt{5}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{5-1}}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{5-1}$; $1-1=2$ FALSO

Solución $\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$

$x=\pm\sqrt{2}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{2-1}}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2-1}$ $\quad 1=1$ VERDADERO

9.- (1 puntos) Utiliza el binomio de Newton para desarrollar la siguiente potencia. Proporciona el resultado simplificado al máximo sin potencias negativas ni fraccionarias: $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^4=$

(0.5 puntos) Utiliza el resultado anterior para calcular con exactitud (sin decimales) el valor de $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^4=$

$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^4=\binom{4}{0}(\sqrt{x})^4-\binom{4}{1}(\sqrt{x})^3\frac{1}{x}+\binom{4}{2}(\sqrt{x})^2\frac{1}{x^2}-\binom{4}{3}\sqrt{x}\frac{1}{x^3}+\binom{4}{4}\frac{1}{x^4}=$

$=\boxed{x^2-4\sqrt{x}+\frac{6}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$

$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^4=2^2-4\sqrt{2}+\frac{6}{2}-\frac{4\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{16}=7+\frac{1}{16}-\frac{9\sqrt{2}}{2}=\boxed{\frac{113}{16}-\frac{9\sqrt{2}}{2}}$