Comenzamos ahora el estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las de álgebra y de la geometría. La fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones las aclararemos más adelante en este libro. En este capítulo introduciremos la llamada derivada de una función, y usted aprenderá reglas importantes para encontrar derivadas. Verá también cómo se usa la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.

10.1 LA DERIVADA

JETIVO Desarrollar la idea recta tangente a una curva, inir la pendiente de una va, definir una derivada y rle una interpretación geo- trica. Calcular derivadas por dio del uso de la definición límite.

Uno de los problemas principales de que se ocupa el cálculo es el de encontrar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. Quizá en geometría usted vio que una recta tangente, o *tangente*, a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto (véase la fig. 10.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 10.2(a) las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto, P. Si bien L_2 no la veríamos como la tangente en este punto, L_1 sí lo es. En la figura 10.2(b) podríamos considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en el punto P, aunque L_3, interseca a la curva en otros puntos.

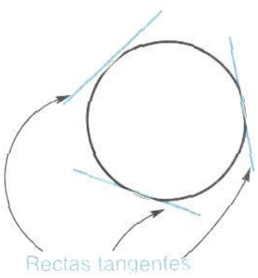
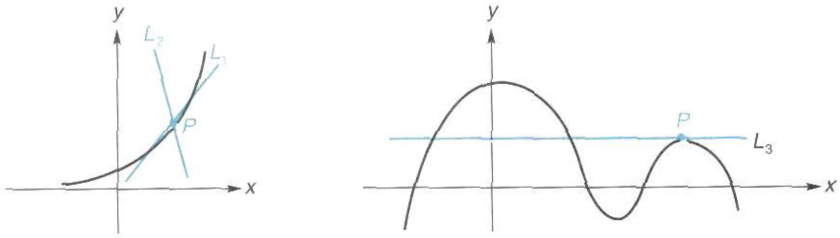


FIGURA 10.1 Rectas tangentes a un círculo.



L_1 es una recta tangente en P, pero L_2 no.
(a)

L_3 es una recta tangente en P.
(b)

FIGURA 10.2 Recta tangente en un punto.

De los ejemplos anteriores, usted puede ver que debemos abandonar la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en sólo un punto. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, utilizamos el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante.* Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

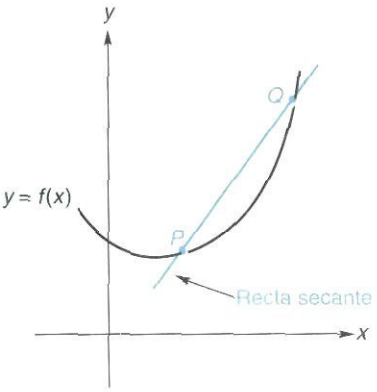


FIGURA 10.3 Recta tangente PQ.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 10.3. Queremos definir la recta tangente en el punto P. Si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una línea secante. Si Q se mueve a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (véase la fig. 10.4), PQ', PQ'', etc., son líneas secantes características. Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. *En ambos casos, las líneas secantes se acercan a la misma posición límite.* Esta posición límite común de las líneas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en P. Esta definición parece razonable, y se aplica a curvas en general y no sólo a círculos.

Una curva no tiene necesariamente una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ no tiene una tangente en $(0,0)$. Como puede ver en la figura 10.5, una recta secante que pasa por $(0, 0)$ y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta $y = x$. Así, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = x$. Sin embargo, una recta secante que pase por $(0,0)$ y un punto cercano a su izquierda sobre la

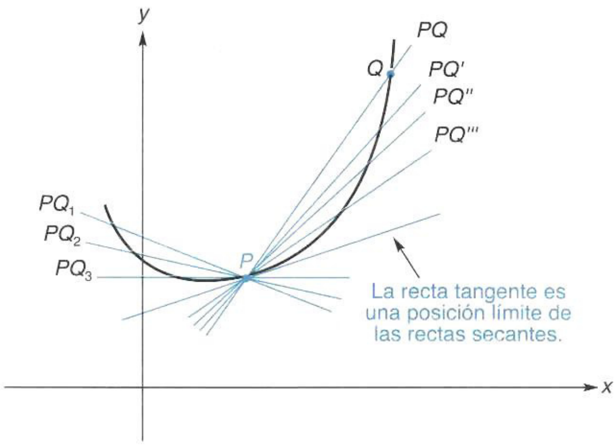


FIGURA 10.4 La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

curva, siempre será la recta $y = -x$. Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = -x$. Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en (0,0).

Ahora que tenemos una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, podemos definir la *pendiente de una curva* en un punto.

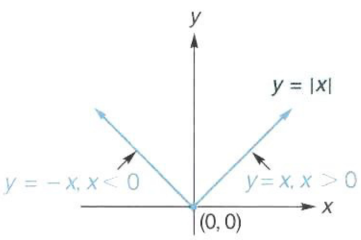


FIGURA 10.5 No hay recta tangente para la gráfica de $y = |x|$ en $(0, 0)$.

Definición

La ***pendiente de una curva*** en un punto P es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en P.

Como la tangente en P es una posición límite de las líneas secantes PQ, consideremos la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se acerca a P. Por ejemplo, consideremos la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (véase la fig. 10.6) es

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5.$$

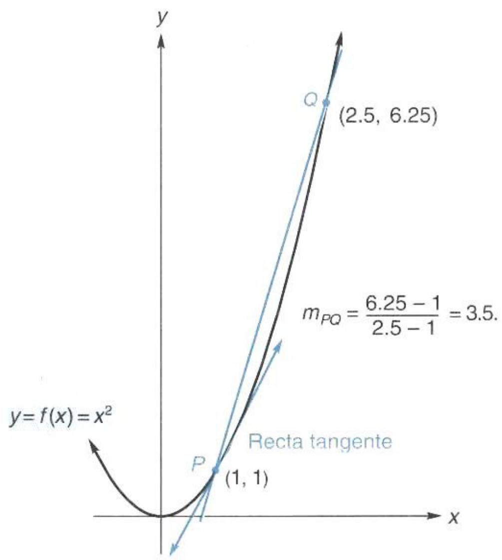


FIGURA 10.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por $(1, 1)$ y $(2.5, 6.25)$.

La tabla 10.1 incluye otros puntos Q sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se acerca a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, podemos esperar que la pendiente de la recta tangente indicada en (1, 1) sea 2. Esto se confirmará luego en el ejemplo 1. Pero primero queremos generalizar nuestro procedimiento.

TABLA 10.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1,1)$

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	$(6.25 - 1)/(2.5 - 1) = 3.5$
(2, 4)	$(4 - 1)/(2 - 1) = 3$
(1.5, 2.25)	$(2.25 - 1)/(1.5 - 1) = 2.5$
(1.25, 1.5625)	$(1.5625 - 1)/(1.25 - 1) = 2.25$
(1.1, 1.21)	$(1.21 - 1)/(1.1 - 1) = 2.1$
(1.01, 1.0201)	$(1.021 - 1)/(1.01 - 1) = 2.01$

Para la curva $y = f(x)$, en la figura 10.7 encontraremos una expresión para la pendiente en el punto $P = (x_1, f(x_1))$. Si $Q = (x_2, f(x_2))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

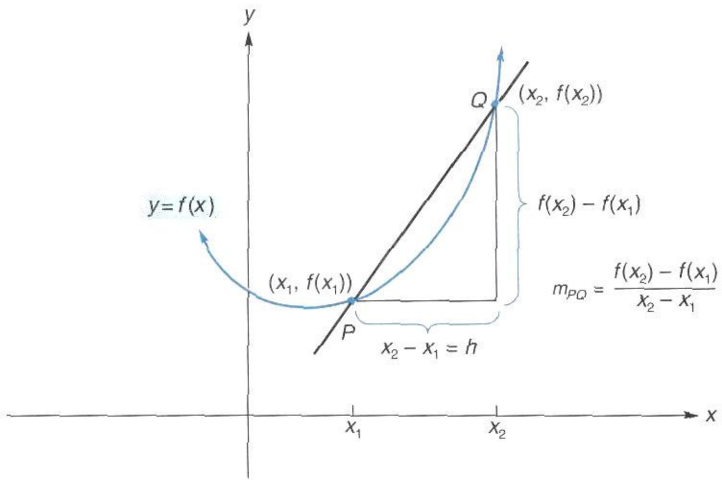


FIGURA 10.7 Recta secante que pasa por P y Q.

Si llamamos h a la diferencia $x_2 - x_1$, podemos escribir x_2 como $x_1 + h$. Aquí se debe tener que $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $x_2 = x_1$ y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Conforme Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, entonces x_2 se acerca a x_1. Esto significa que h se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes, que es la pendiente de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$, es el siguiente límite:

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec},$$

o de manera más precisa

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \tag{1}$$

En el ejemplo 1, usaremos este límite para confirmar nuestra conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$ es igual a 2.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ *en el punto* $(1, 1)$.

Solución: la pendiente es el límite en la ecuación (1) con $f(x) = x^2$ y $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.\end{aligned}$$

Así, la recta tangente a $y = x^2$ en $(1, 1)$ tiene pendiente igual a 2 (véase la fig. 10.6).

Podemos generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ sobre una curva. Si reemplazamos x_1 por x se obtiene una función, llamada *derivada* de f, cuya entrada es x y su salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$, siempre que la recta tangente *tenga* una pendiente (esto es, que la tangente no sea vertical). Tenemos así la definición siguiente, la cual constituye la base del cálculo diferencial.

Definición

La ***derivada*** de una función f es la función, denotado por f' (léase "f prima"), y definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que este límite exista. Si $f'(x)$ puede encontrarse, se dice que f es ***diferenciable*** y $f'(x)$ se llama derivada de f en x, o derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación.***

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se llama **cociente de diferencia** (cociente diferencial). Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencia cuando $h \to 0$.

de no ser desidioso cuando ique la definición de derivada no un límite. Escriba $\lim\limits_{h\to 0}$ en cada o, antes de tomar el límite. desgracia, algunos estudiantes cuidan tomar el límite final, y h irece en sus respuestas. Ésta es a manera rápida de perder puntos un examen.

EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

Si $f(x) = x^2$, encontrar la derivada de f.

Solución: al aplicar la definición de derivada se obtiene

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x.
\end{aligned}
$$

Observe que al tomar el límite tratamos a x como una constante, porque es h y no x la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, que podemos interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2(1) = 2$, que confirma el resultado del ejemplo 1.

Además de la notación $f'(x)$, otras formas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en x son

$\dfrac{dy}{dx}$	(se lee "de ye, de equis"),
$\dfrac{d}{dx}[f(x)]$	[de $f(x)$, de equis],
y'	(y prima),
$D_x y$	(de x de y),
$D_x[f(x)]$	[de x de $f(x)$].

Advertencia La notación $\dfrac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque parezca una. Es un símbolo sencillo para una derivada. Aún no hemos dado un significado a los símbolos individuales como dy y dx.

Si la derivada $f'(x)$ puede evaluarse en $x = x_1$, el *número* resultante $f'(x_1)$ se llama **derivada de f en x_1**, y se dice que f es *diferenciable* en x_1. Como la derivada nos da la pendiente de la recta tangente, se tiene:

$f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_1, f(x_1))$.

Otras dos notaciones para derivada de f en x_1 son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} \quad \text{y} \quad y'(x_1).$$

EJEMPLO 3 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, *encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de* f *en* $(1, 7)$.

Solución:

Estrategia: primero determinamos la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Usamos este resultado y el punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente de la ecuación para una línea recta, y así obtenemos la ecuación de la recta tangente.

Tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3] - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2). \end{aligned}$$

Por lo que $\qquad f'(x) = 4x + 2$

y $\qquad f'(1) = 4(1) + 2 = 6.$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1).$$

Acostumbraremos expresar una ecuación de la recta tangente en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} y - 7 &= 6x - 6, \\ y &= 6x + 1. \end{aligned}$$

Advertencia En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

EJEMPLO 4 Determinación de la pendiente de una curva en un punto

Encontrar la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ *en el punto en que* $x = 6$.

Solución: la pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si hacemos $y = f(x) = 2x + 3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h) + 3] - (2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2. \end{aligned}$$

83. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$$

cuando $x = 0$.

84. Repita el problema 83 para la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$$

cuando $x = 4$.

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2$$

en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva

$$y = \frac{x^5}{5} - x + 1.$$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = x^2 - 5x + 3$$

en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x + 4.$$

89. Si $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, evalúe la expresión

$$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x).$$

90. Economía Eswaran y Kotwal[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales son empleados por día y efectúan trabajos menores y rutinarios como desherbado, recolección y trillado. La diferencia z en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 3x$ en el punto $(2, 2)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(2, 2)$ y parece ser tangente a la curva.

92. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el punto $(1, 1)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(1, 1)$ y parece ser tangente a la curva.

---

[2]M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

OBJETIVO Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal", que se utiliza con frecuencia en administración y economía.

10.3 La derivada como una razón de cambio

Hemos dado como interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación muy importante de la derivada implica el movimiento de un objeto viajando en línea recta. Esto nos da una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio*.

Para denotar el cambio en una variable x, por lo común, se usa el símbolo Δx (léase "delta x"). Por ejemplo, si x cambia de 1 a 3, entonces el cambio en x es $\Delta x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de x ($= 3$) es el viejo valor más el cambio, o $1 + \Delta x$. De manera similar, si t se incrementa en Δt, el nuevo valor es $t + \Delta t$. Usaremos la notación Δ en el análisis siguiente.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de la recta numérica de la figura 10.12 de acuerdo con la ecuación

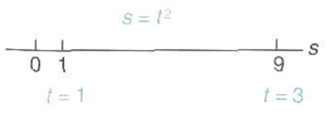


FIGURA 10.12 Movimiento a lo largo de una recta numérica.

$$s = f(t) = t^2,$$

donde s es la posición del objeto en el tiempo t. Esta ecuación se llama *ecuación de movimiento* y f se llama ***función de posición.*** Suponga que t está en segundos y s en metros. En $t = 1$, la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento*, de $9 - 1 = 8$ metros y la *velocidad promedio* (v_{prom}) del objeto se define como

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud intervalo de tiempo}} \tag{1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}.$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s de $t = 1$ a $t = 3$, significa que *en promedio*, la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean Δs y Δt los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \qquad (\text{en el intervalo } t = 1 \text{ a } t = 3).$$

La razón $\Delta s/\Delta t$ se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a t** en el intervalo de $t = 1$ a $t = 3$.

Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo sea de sólo 1 segundo (esto es, $\Delta t = 1$). Entonces, para el intervalo *más corto* de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t = 2$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}.$$

Con mayor generalidad, en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$, el objeto se mueve de la posición $f(1)$ a la posición $f(1 + \Delta t)$. Su desplazamiento es entonces $f(1 + \Delta t) - f(1)$:

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1).$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración Δt, la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si Δt se considerase cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$ sería cercana a lo que podríamos llamar la *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$, esto es, la velocidad en un *punto* en el tiempo ($t = 1$), en oposición a la velocidad en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de Δt entre 0.1 y 0.001, obtenemos las velocidades promedio anotadas en la tabla 10.2, que usted puede verificar.

TABLA 10.2

Duración del intervalo Δt	**Intervalo de tiempo,** $t = 1$ **a** $t = 1 + \Delta t$	**Velocidad promedio,** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a cero, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando Δt tiende a 0, $\Delta s/\Delta t$ tiende 2 m/s. Definimos el límite de la velocidad promedio cuando $\Delta t \to 0$, como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. Se llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t, en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si pensamos en Δt como h, el límite a la derecha es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Así, la velocidad instantánea del objeto en $t = 1$ es ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t,$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s},$$

lo que confirma nuestra conclusión anterior.

En resumen, si $s = f(t)$ es la función posición de un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad promedio del objeto en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio y la velocidad

Supóngase que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta numérica está dada por $s = f(t) = 3t^2 + 5$, donde t está en segundos y s en metros.

a. *Encontrar la velocidad promedio en el intervalo* [10, 10.1].

b. *Encontrar la velocidad cuando* $t = 10$.

Solución:

a. Se tiene aquí, $t = 10$ y $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$. Tenemos

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10 + 0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$