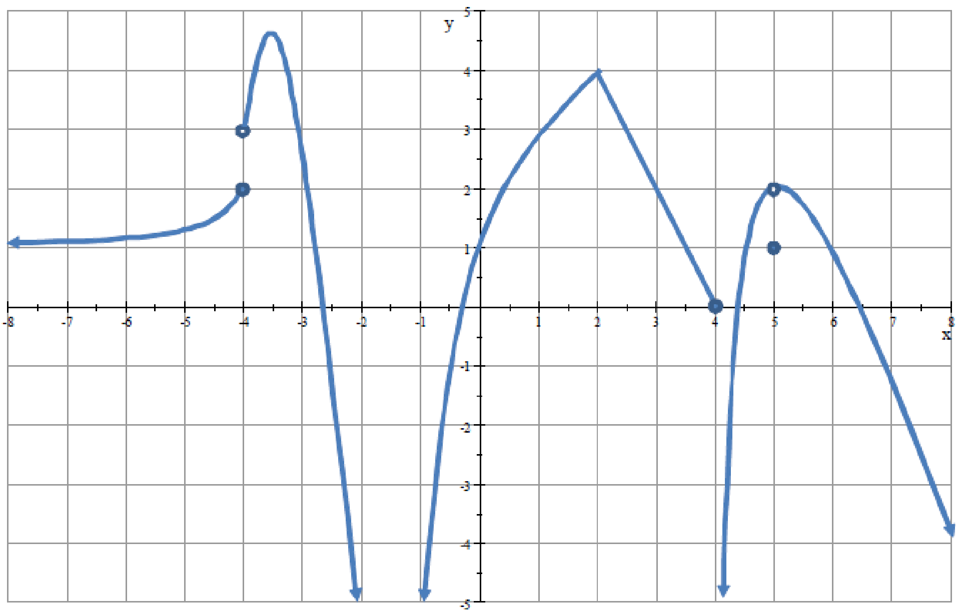
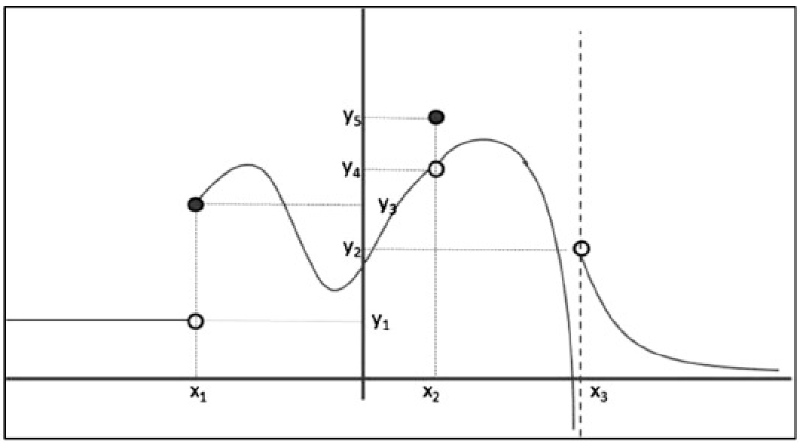


La siguiente imagen representa la gráfica de la función *f*.



Sobre ella responde a las siguientes preguntas marcando **V**erdadero o **F**also:

i. No existe $\lim_{x \to x_1^-} f(x)$ □ **V** □ **F**

ii. La función no está definida en x_1. □ **V** □ **F**

iii. $\lim_{x \to x_2} f(x) = y_4$ □ **V** □ **F**

iv. La función es continua en x_2. □ **V** □ **F**

v. $\lim_{x \to x_3^+} f(x) = y_2$ □ **V** □ **F**

vi. No existe $\lim_{x \to x_3^+} f(x)$. □ **V** □ **F**

vii. La función tiene una asíntota vertical. □ **V** □ **F**
Escribe su ecuación si la respuesta es afirmativa: ……..…………………………...

viii. La función tiene asíntotas horizontales. □ **V** □ **F**
Escribe sus ecuaciones si la respuesta es afirmativa: ……………………………...

Calcula

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+1 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad 1<x<5 \\ x+1 & si \quad x\ge 6 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x^3-2x} & si \quad x>0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<-4 \\ 2^x & si \quad -4<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad 1<x\le 7 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad x\le 0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>-1 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & si \quad x\le -1 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}-1 & si \quad x>0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad x\le 0 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & si \quad -3\le x\le 0 \\ \ln x & si \quad 0<x<1 \\ x-2 & si \quad 1<x\le 7 \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-2x} & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{\ln(x-1)} & si \quad 1<x<6 \\ x-2 & si \quad 6<x \end{cases}$

Límite en el infinito

Cuando se calcula el límite de una función en el infinito se trata de determinar la tendencia que tendrá la función (los valores que toma) cuando la variable *x* se hace muy muy grande y positiva ($x \to +\infty$) o muy muy pequeña y negativa ($x \to -\infty$)

Si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

entonces la gráfica de *f* se *aproxima* a la recta horizontal *y* = k cuando $x \to \pm\infty$. Dicha recta se denomina **asíntota horizontal** de *f*.

Como norma general para el cálculo de un límite en el infinito se sustituye la variable *x* por ∞ y se calcula el límite.

Se verifican las siguientes "relaciones" entre 0, ∞ y un número real *k*:

$$\frac{k}{0} = \infty \quad \frac{k}{\infty} = 0 \quad \infty \pm k = \infty \quad \frac{\infty}{k} = \infty \quad \frac{0}{k} = 0 \quad \frac{0}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad k \cdot \infty = \infty$$
$$\infty^k = 0 \; si \quad k < 0$$
$$\infty^k = \infty \; si \quad k > 0$$
$$+\infty + \infty = +\infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

El valor del límite es el resultado de tal sustitución salvo que aparezcan INDETERMINACIONES:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^{\infty} \quad 0^0 \quad 0 \cdot \infty$$

1.- Los límites fundamentales son:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n > 0$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n = \pm\infty \quad \forall n > 0$$

2.- Si *f*(*x*) es un **POLINOMIO** de grado n: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x \; + a_0$ entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x \; + a_0) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n = \pm\infty$$

y no tiene asíntotas horizontales. Se dice que la función presenta una rama parabólica.
Esto se aplica entre otras funciones a las **rectas, parábolas y cúbicas**.

3.- Si f es una función de tipo **HIPÉRBOLA** $f(x) = \dfrac{k}{ax+b}$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

y tiene asíntota horizontal en la recta *y* = 0 (el eje OX).

4.- Si *f* es una función de tipo **RACIONAL** $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{grado numerador} < \text{grado denominador} \\ \infty & \text{si} \quad \text{grado numerador} > \text{grado denominador} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado numerador} = \text{grado denominador} \end{cases}$$

Siendo a_n el coeficiente de mayor grado de P_n y b_m el coeficiente de mayor grado de Q_m

La función tiene asíntota horizontal en la recta $y = 0$ en el primer caso y a la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ en el tercer caso. En el segundo caso pueden suceder dos situaciones que veremos después.

5.- Si $f(x)$ es una función RADICAL con radicando un polinomio de cualquier grado $f(x) = \sqrt[k]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$ entonces se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[k]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} = \sqrt[k]{\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} =$$

$$= \sqrt[k]{\pm\infty} = \pm\infty \quad \text{(o no existe)}$$

6.- Si $f(x) = \ln(g(x))$ entonces se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(g(x)) = \ln\left(\lim_{x\to\pm\infty} g(x)\right)$$

Y basta tener en cuenta que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x) \quad \text{no existe}$$

7.- Si $f(x) = e^{g(x)}$ entonces se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}$$

Y basta tener en cuenta que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

8.- Generalizando el caso anterior se tiene que si $f(x) = k^{g(x)}$ entonces se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} k^{g(x)} = k^{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}$$

Y basta tener en cuenta que

k > 1	**0 < k < 1**
$\lim_{x\to+\infty} k^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} k^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} k^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} k^x = \infty$

9.- Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty$

Pueden darse dos circunstancias:

(a) La curva adopta una rama parabólica en $\pm\infty$.
En este caso $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{xQ_m(x)} = \pm\infty$

(b) La curva crece (o decrece) pero se ajusta a una recta oblicua.
En este caso se han de calcular los límites:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{xQ_m(x)}=m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-mx\right)=h$$

Si *m* y *h* son números finitos entonces la curva se ajusta a la recta de ecuación ***y = mx +h***, que se llamará una **asíntota oblicua** de *f.*

Estudio de algunos casos importantes

---

e

El número **e**. se obtiene como límite de toda expresión siguiente:

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

Siempre que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

∞-∞

Este límite suele proceder:

(a) De la suma (o resta) de dos fracciones algebraicas.
La operación habitual es operar las fracciones hasta obtener una función racional y aplicar los límites del punto 4.

(b) De la resta de dos radicales.
La operación habitual es multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión radical. Si el límite se convierte en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se ha de dividir por el término de mayor grado de *x*.

1^{∞}

Estos límites proceden de una expresión exponencial y su valor está relacionado con el número **e**. El límite no ha de ser necesariamente en el infinito.

Supongamos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=1^{\infty}$$

El límite se calcula con la siguiente regla:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{l}$$

dónde l se obtiene como:

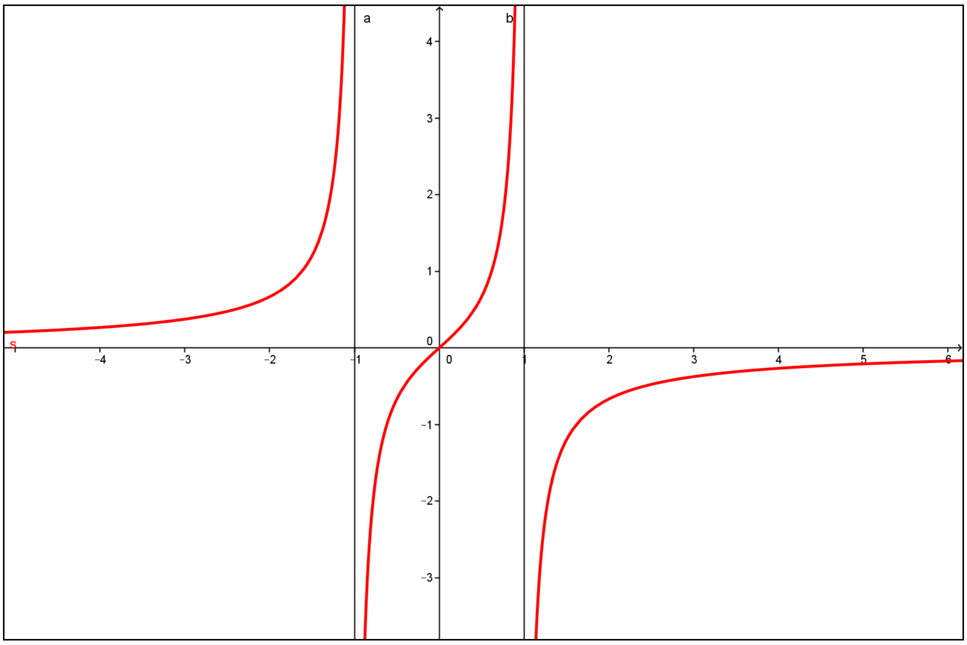
$$l=\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)$$

Ejercicios de gráficas de funciones

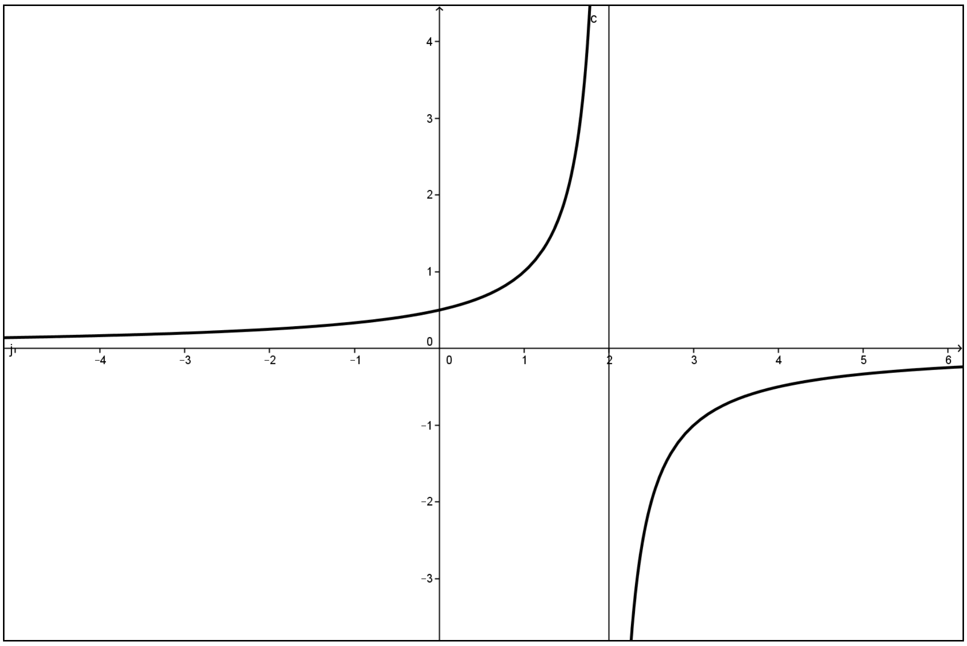
Dadas las siguientes gráficas de funciones se pide:

(a) Dominio
(b) Cortes con OX
(c) Cortes con OY
(d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
(e) Puntos de discontinuidad (si los hubiera).
(f) Máximos y mínimos si los hubiera.
(g) **Limites en los puntos de discontinuidad**.
(h) **Limites en el infinito**.
(i) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas (si las hubiera)

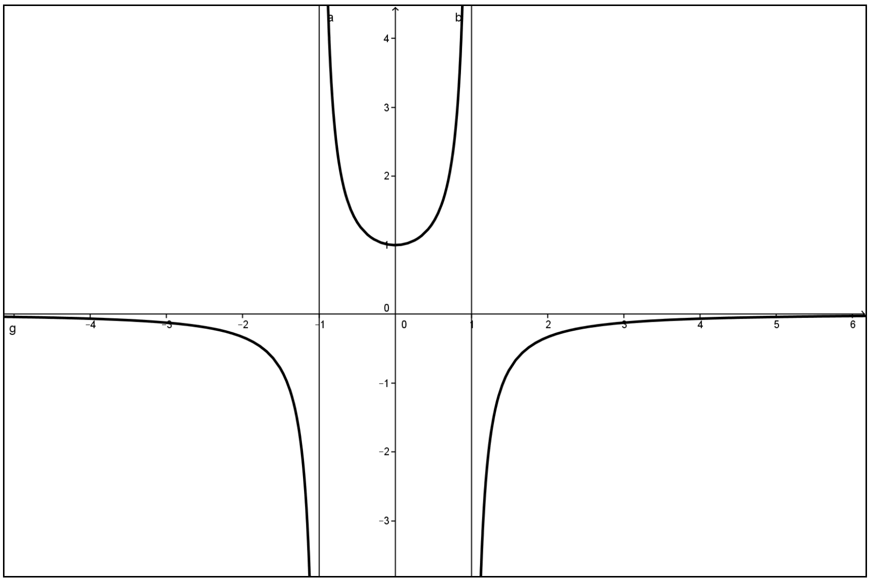
A



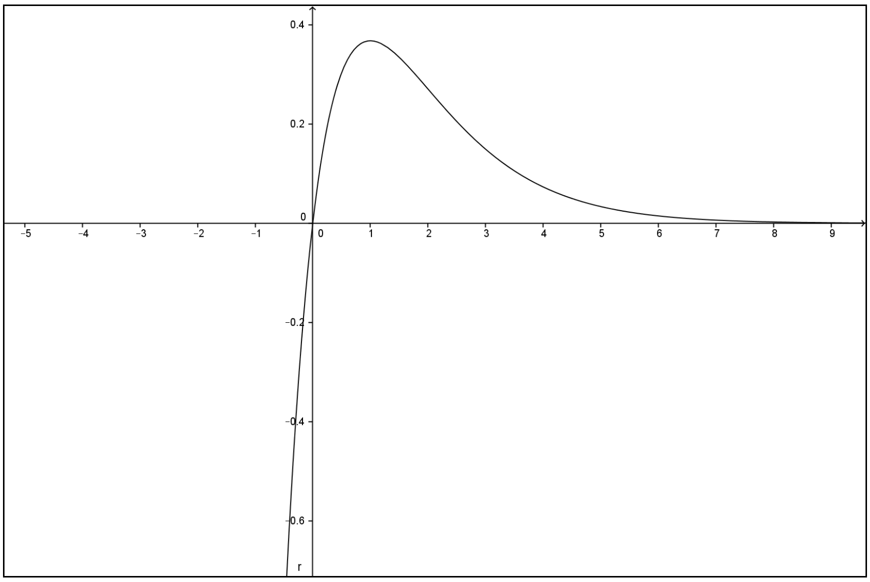
B



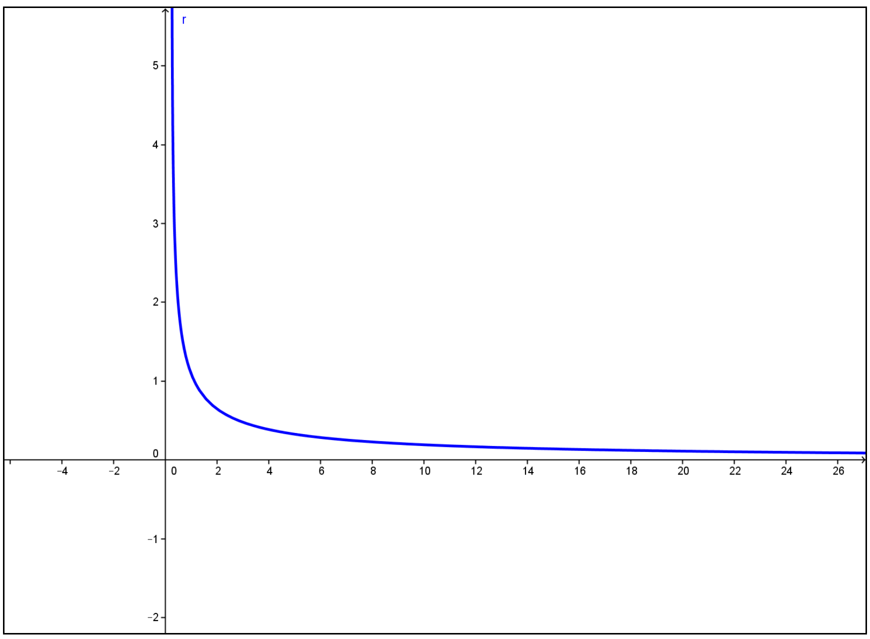
C



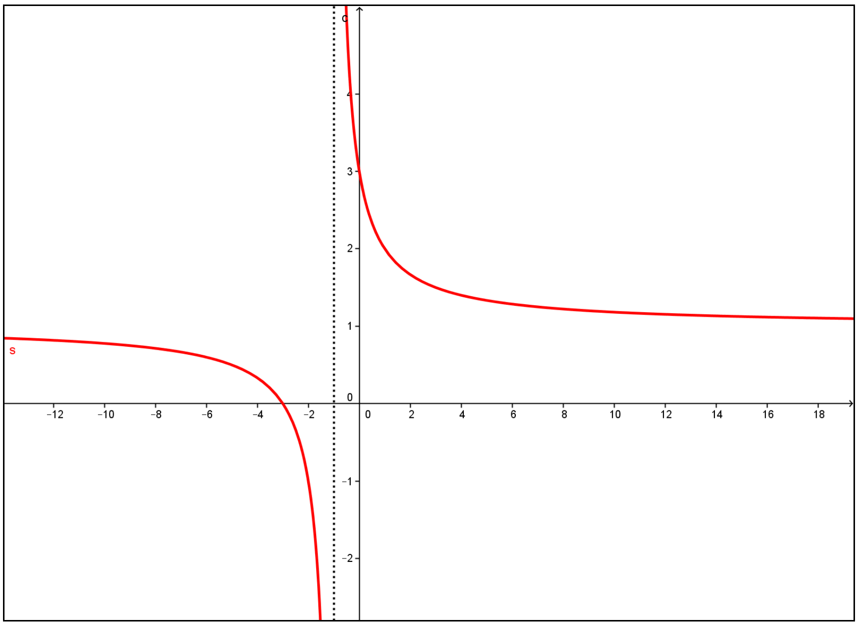
D



E



F



G