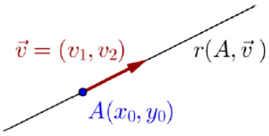
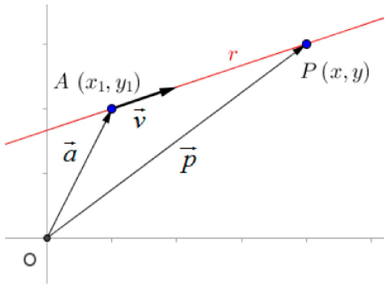
ECUACIONES DE LA RECTA

Si en un plano π nos dan un punto $A(x_0, y_0)$ y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, existe una sola recta que pasa por A y tiene la dirección de $\vec{v}$, simbólicamente escribimos $r\left(A, \vec{v}\right)$, y se lee "recta que pasa por A y tiene como vector director a $\vec{v}$"





$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$
$$\vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Realizando las operaciones vectoriales que aparecen en la ecuación anterior, obtenemos las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS**

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_0, y_0) + t(v_1, v_2) \\ (x, y) &= (x_0, y_0) + (tv_1, tv_2) \\ (x, y) &= (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \boxed{\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned}\right\}}$$

Despejando *t* en las ecuaciones paramétricas e igualando las expresiones se obtiene la **ECUACIÓN CONTINUA** de la recta

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{v_1} \\ t &= \frac{y - y_0}{v_2} \end{aligned}\right. \rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}}$$

Transformando la Ecuación Continua, renombrando y ordenando obtenemos la **ECUACIÓN GENERAL** o **IMPLÍCITA** de la recta

$$\begin{aligned} v_2(x - x_0) &= v_1(y - y_0) \\ v_2 x - v_2 x_0 &= v_1 y - v_1 y_0 \\ v_2 x - v_1 y + v_1 y_0 - v_2 x_0 &= 0 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} A &= v_2 \\ B &= -v_1 \\ C &= v_1 y_0 - v_2 x_0 \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

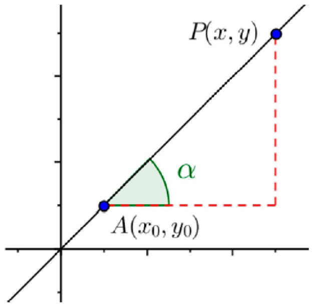
Además, vemos que: $\vec{v} = (-B, A)$; $m = -\dfrac{A}{B}$

Despejando "*y*" de la Ecuación General y renombrando obtenemos la **ECUACIÓN EXPLÍCITA** de la recta

$$\begin{aligned} \frac{Ax}{B} + \frac{By}{B} + \frac{C}{B} &= 0 \\ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} & \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} & m = -\frac{A}{B} \ ; \ m = \frac{v_2}{v_1} \ (\textit{pendiente}) \\ & b = -\frac{C}{B} \ (\textit{ordenada en el origen}) \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

Por trigonometría sabemos que la pendiente de la recta de la figura es la tangente del ángulo que forma con la horizontal, si renombramos y reordenados la expresión obtenemos la **ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE**



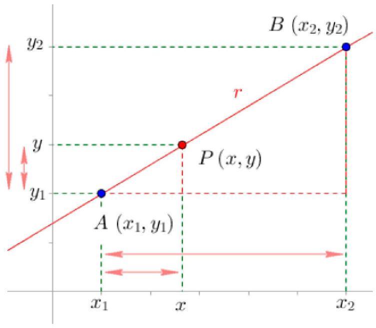
$$m = tg\,\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$$

También la podemos obtener a partir de la ecuación continua sin más que multiplicar ambos miembros por v_2

Dados dos puntos, existe una recta y solo una que los contiene. Sabiendo las coordenadas de éstos puntos podemos obtener, por semejanza de triángulos, la **ECUACIÓN DE LA RECTA DEFINIDA POR DOS PUNTOS**

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

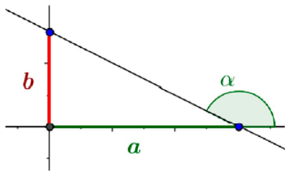


También la podemos obtener a partir de uno de ellos y tomar como vector director el vector que determinan los dos puntos

---

A partir de la ecuación general, podemos escribir lo siguiente para obtener la **ECUACIÓN CANÓNICA** o **SEGMENTARIA** de la recta

$$Ax + By + C = 0$$
$$Ax + By = -C \quad Si\ C \neq 0\ tenemos$$
$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$
$$Si\ A \neq 0 \quad y \quad B \neq 0\ tenemos$$

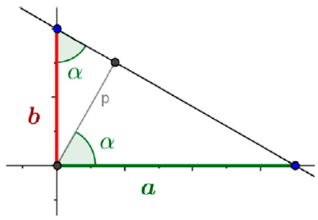


$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Siendo *a* y *b* los segmentos que intercepta sobre los ejes la recta *r*

Considerando una recta definida por su distancia *p* al origen de coordenadas y partiendo de la ecuación segmentaria se deduce la **ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA**

$$\boxed{x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p = 0}$$



El término independiente es siempre negativo puesto que *p*, por ser la longitud de un segmento es siempre positivo.

Paso de la ecuación general a la ecuación normal:

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

En el caso de que el término independiente sea positivo, cambiamos el signo a toda la expresión.