

Matemáticas II
Problemas propuestos en la PAU 2010-16

Problema 11.1.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = e^x + a e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a :

- a) (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- b) (1 punto) Estudiar para que valor, o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
- c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Problema 11.2.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
- b) (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .
- c) (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Problema 11.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

- a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.
- c) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.
- d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Problema 11.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

- a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en \mathbf{R} .
- b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 11.5.3 (2 puntos) Hallar:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3 + 5x - 8x^3}}{1 + 2x} \right]^{25}$
- b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^3)^{2/x^3}$

Problema 11.5.4 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
- b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 11.7.3 (2 puntos) Calcular los límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Problema 11.8.2 (3 puntos) Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Problema 11.9.3 (2 puntos) Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Problema 11.10.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
- b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
- c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Problema 12.1.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.
- b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Problema 12.2.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Problema 12.3.3 (2 puntos) Se pide:

- a) (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x \sqrt{4 + 5x^2} dx$.
- b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$.

Problema 12.3.4 (2 puntos) Se pide:

- a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

- b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Problema 12.4.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Problema 12.5.1 (3 puntos).

- a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

- b) (1 punto) Calcular la integral: $\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2} dx$
- c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Problema 12.6.3 (2 puntos). Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

Problema 13.1.3 (2 puntos) Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Problema 13.1.4 (2 puntos) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0, P(0))$ sea $y = x + 3$.

Problema 13.3.3 (2 puntos) Hallar a , b , c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Problema 13.4.1 (3 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \quad g(x) = (\ln x)^x, \quad h(x) = \sin(\pi - x)$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.
- c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Problema 13.5.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$
- c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Problema 13.6.3 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$$

se pide:

- a) (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
- b) (1 punto) Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Problema 13.6.4 (2 puntos)

- a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u) du = 3$.
Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2 dx$$

- b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Problema 13.7.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ?
- b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
- c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Problema 13.8.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

- a) (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
- b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.
- c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Problema 14.1.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- b) (1 punto). Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
- c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Problema 14.3.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se

- a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.
- b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Problema 14.4.1 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$, se pide:

- a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- c) (1 punto). Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

Problema 15.1.4 (2 puntos)

- a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x) dx$.
Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x) dx$$

- b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u) du = \frac{1}{2}$.
Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2} dx.$$

Problema 15.2.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.
- b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
- c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Problema 15.1.3 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$
b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Problema 15.3.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

- b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX .

Problema 15.4.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(donde \ln denota logaritmo neperiano) se pide:

- a) (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) (1 punto). Calcular el valor de a , para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .
c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Problema 15.3.4 (2 puntos) Calcular justificadamente:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$

Problema 15.5.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.
c) (1 punto). Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

Problema 15.6.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ x e^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
- b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .
- c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx$$

,

donde \ln denota logaritmo neperiano.

Problema 16.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.
- b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Problema 16.2.2 (3 puntos) Hallar

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.
- b) (1 punto). $\int (3x + 5) \cos x dx$.
- c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

.

Problema 16.3.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

donde \ln denota logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
- b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
- c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x) dx$.

Problema 16.4.2 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f .
- b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x) dx$.

Problema 16.5.3 (2 puntos)

- a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
- b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Problema 16.5.4 (2 puntos)

- a) (1 punto). Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$
- b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

Problema 16.6.1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(donde \ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .
- b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Problema 17.1.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, se pide:

- a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
- c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
- d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX , entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Problema 17.2.2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.
- b) (0,5 puntos). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- c) (1 punto). Calcular $\int_1^2 f(x) dx$.

Problema 17.3.1 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.
- c) (1,5 punto). Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Problema 17.4.3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.
- b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) dx = 5; \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

Problema 17.4.4 (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

Problema 17.5.3 (2 puntos) Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?

Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Solución:

x :precio de la papeleta.

$$f(x) = x(5000 - (x - 2)500) = -500x^2 + 6000x$$

$$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \implies x = 6$$

$f''(x) = -1000 \implies f(6) = -1000 < 0 \implies x = 6$ euros es un máximo que produciría un importe de $f(6) = 18000$ euros, si restamos el precio del ordenador tendríamos que se dona a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Problema 17.5.4 (3 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x + x^2$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

- a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.
- b) (0,5 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)$.

Problema 17.6.2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x-4} + 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$,

se pide:

- a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.
- b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.
- c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^1 f(x)dx$.